

応用気象学IA

—中高緯度の気象力学—

榎本 剛

2016 年 5 月 30 日～7 月 11 日

目次

第 1 章	はじめに	2
第 2 章	鉛直循環	4
2.1	様々な鉛直座標	4
2.2	気圧座標	5
2.3	Q ベクトル	7
第 3 章	線型不安定理論	15
3.1	基礎方程式系	15
3.2	線型安定性問題	17
第 4 章	東西平均循環	24
4.1	Euler 平均	24
4.2	変形された Euler 平均	26
4.3	東西平均渦位方程式	27
第 5 章	ロスビー波の伝播	28
5.1	分散関係式	28
5.2	ロスビー波の鉛直伝播	28
5.3	ロスビー波の水平伝播	30

第 1 章

はじめに

前半導出した準地衡風方程式系を用いて、高低気圧、ハドレー循環、成層圏突然昇温、低気圧の下流発達（downstream development）などの現象を力学的に理解するための基礎を学ぶ。そのために、以下の項目について概観する予定である。

- 鉛直循環
- 傾圧不安定理論
- 東西平均循環
- ロスビー波の伝播

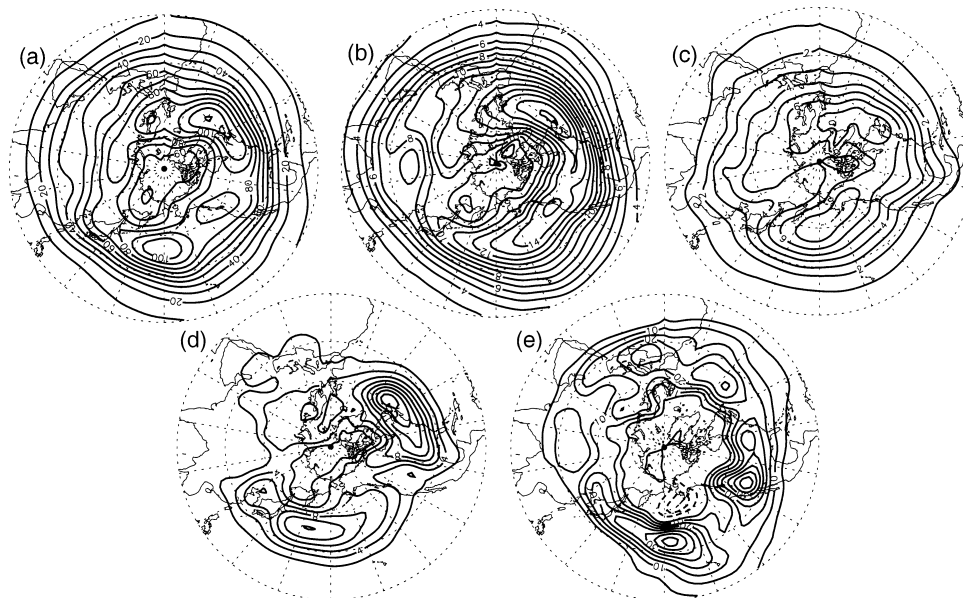


図 1.1 帯域透過を施した (a) 250 hPa 面ジオポテンシャル高度（等値線間隔 10 m）、(b) 300 hPa 面南北風（等値線間隔 2 m s^{-1} ）(c) 海面気圧（等値線間隔 1 hPa）の標準偏差. (d) 850 hPa 面熱（等値線間隔 2 K m s^{-1} ）及び (e) 250 hPa 面西風運動量の極向きフラックスの共分散 (Chang et al. 2002). NCEP–NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) から作成.

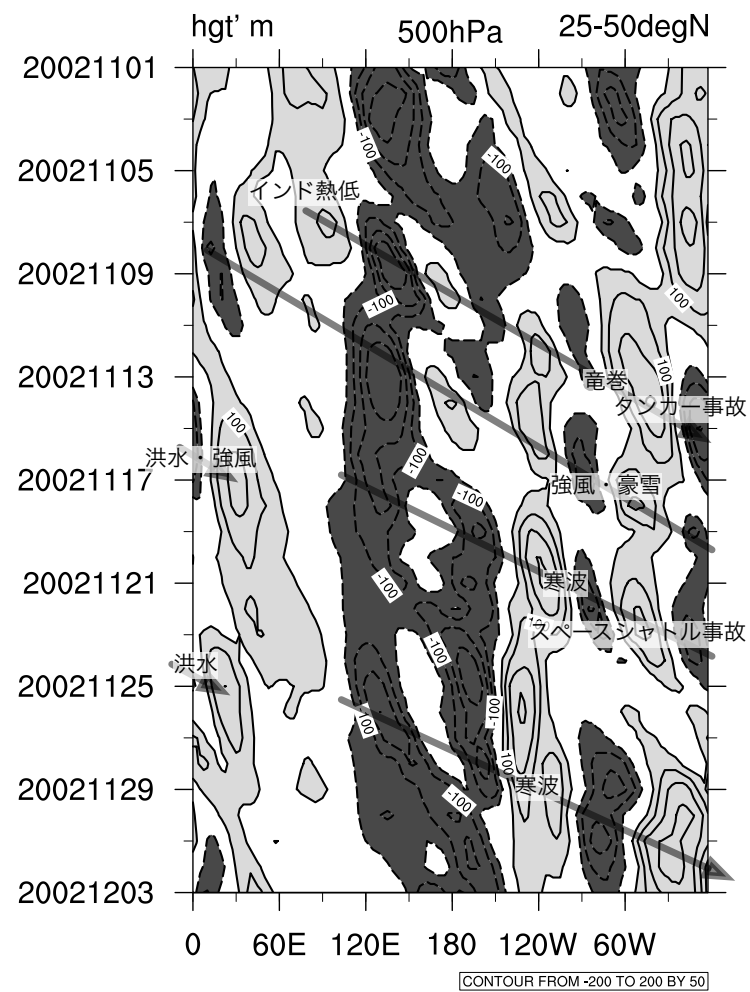


図 1.2 2002 年 11 月の 500 hPa 面ジオポテンシャル高度の東西偏差 (等値線間隔 50 m) の時間-経度断面図. 25-50°N 平均. NCEP-NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) 日平均データから作成.

課題

- 高度の東西偏差や南北風の時間-高度断面図を作成し, 低気圧の下流発達の事例とそれに伴う気象災害との対応について調べよ.

第 2 章

鉛直循環

この講義では、準地衡風方程式系における鉛直循環について学ぶ。高度よりも気圧に基づく鉛直座標が便利なので、方程式系を座標変換する。

2.1 様々な鉛直座標

鉛直座標は、物理的な高さ z に限らない。 z と 1 対 1 に対応する様々な変数を鉛直座標として用いることができる。まず、合成函数の偏微分の復習から始める。

2.1.1 合成函数の偏微分

$f = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ がいずれも u, v に関して偏微分可能であれば、合成函数 $f = f((\varphi(u, v), \psi(u, v)))$ は、 u, v に関して偏微分可能で、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_v = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_v + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_v, \quad (2.1)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_u = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_u + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_u \quad (2.2)$$

と書ける。今、 $x = u$, $v = s$ 即ち $y = z(x, s)$ の場合を考えると、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_s = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_z + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_u \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_s, \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_u = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_u \left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_u \quad (2.4)$$

となる。

2.1.2 一般化鉛直座標

Kasahara (1974) に基づいて、一般化された鉛直座標を導入する。(2.4) を用いて、(2.3) を書き換

えると,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_s = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_z + \left. \frac{\partial s}{\partial z} \right|_u \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_s \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_u \quad (2.5)$$

と書ける。 u を水平座標 x, y や時刻 t と見なすと,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_s = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_z + \frac{\partial s}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_s \frac{\partial f}{\partial s}, \quad (2.6)$$

$$\nabla_s f = \nabla_z f + \frac{\partial s}{\partial z} \nabla_s z \frac{\partial f}{\partial s} \quad (2.7)$$

と書ける。これらを使うと d/dt は,

$$\frac{d}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_s + \mathbf{v} \cdot \nabla_s + \dot{s} \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.8)$$

と表すことができる。ここで,

$$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial z} \left[w - \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_s - \mathbf{v} \cdot \nabla_s z \right] \quad (2.9)$$

である。 s は, 一般化された鉛直座標, $\dot{s}$ は一般化された鉛直速度である。

s 座標で静力学平衡は

$$g \frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (2.10)$$

となる。(2.7), (2.8), (2.10) を用いると, 摩擦がないときの水平の運動方程式は,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_s p - g \nabla_s z \quad (2.11)$$

と書ける。また, 連続の式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) + \nabla_s \cdot \left(\mathbf{v} \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\dot{s} \frac{\partial p}{\partial s} \right) = 0 \quad (2.12)$$

と変形される。熱力学の式は全微分で表されるので, 形は変わらない。ただし, 全微分は (2.8) で表される。

2.2 気圧座標

2.2.1 基礎方程式系

運動方程式

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -g \nabla z \quad (2.13)$$

ここで

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \omega \frac{\partial}{\partial p}, \quad \omega \equiv \frac{dp}{dt} \quad (2.14)$$

静力学平衡

$$g \frac{\partial z}{\partial p} = -\alpha, \alpha \equiv \frac{1}{\rho} \quad (2.15)$$

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.16)$$

熱力学の式

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \quad (2.17)$$

2.2.2 準地衡風方程式系

β 平面近似

$$f = f_0 + \beta y, \beta \equiv \frac{df}{dy} \quad (2.18)$$

地衡風

$$u_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial y}, v_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.19)$$

ラグランジュ微分とオイラー微分との関係

$$\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.20)$$

運動方程式

$$\frac{d_g u_g}{dt} = f_0 v_a + \beta y v_g \quad (2.21)$$

$$\frac{d_g v_g}{dt} = -f_0 u_a - \beta y u_g \quad (2.22)$$

静力学平衡

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (2.23)$$

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_g = 0 \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.25)$$

熱力学の式

$$\frac{d_g \theta}{dt} + \omega \frac{d\theta_0}{dp} = \frac{\theta_0}{c_p T_0} \dot{Q} \quad (2.26)$$

ここで θ は、基本場 $\theta_0(p)$ からのずれで、偏差を示す ' は省略する。

$$\theta_{\text{total}}(x, y, p, t) = \theta_0(p) + \theta(x, y, p, t) \quad (2.27)$$

熱力学の式は気温 T を使って

$$\frac{d_g T}{dt} - \frac{p}{R} S_0 \omega = \frac{\dot{Q}}{c_p} \quad (2.28)$$

と表すこともできる。ここで

$$S_0 \equiv -\frac{\alpha_0}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dp} \quad (2.29)$$

は、基本場の安定度を示す。

2.3 Q ベクトル

準地衡風方程式系における鉛直循環を診断する ω 方程式を導出する。以下のように温度風平衡から導出すると、鉛直流 ω を駆動する強制項を簡潔に表現することができる。

2.3.1 Q ベクトルの導出

簡単のため、 f 平面 ($f = f_0$) 上で断熱（非断熱加熱 $\dot{Q} = 0$ ）の場合を考える。このとき運動方程式 (2.21), (2.22) は

$$\frac{d_g u_g}{dt} = f_0 v_a, \quad \frac{d_g v_g}{dt} = -f_0 u_a \quad (2.30)$$

となる。(2.19) の右辺を p で微分し、静力学平衡 (2.23) を用いると温度風平衡

$$f_0 \frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.31)$$

$$f_0 \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.32)$$

が得られる。(2.31) の右辺のラグランジュ微分 (d_g/dt) をとると

$$\frac{d_g}{dt} \left(\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = S_0 \frac{\partial \omega}{\partial y} + Q_y \quad (2.33)$$

となる。ここで、

$$Q_y \equiv -\frac{R}{p} \frac{\partial v_g}{\partial y} \cdot \nabla T \quad (2.34)$$

である。(2.31) の左辺をラグランジュ微分し、(2.31), (2.32) を用いると

$$\frac{d_g}{dt} \left(f_0 \frac{\partial u_g}{\partial p} \right) = f_0^2 \frac{\partial v_a}{\partial p} - Q_y \quad (2.35)$$

となる。(2.33), (2.35) より、

$$S_0 \frac{\partial \omega}{\partial y} - f_0^2 \frac{\partial v_a}{\partial p} = -2Q_y \quad (2.36)$$

が得られる。同様に (2.31) のラグランジュ微分から、

$$S_0 \frac{\partial \omega}{\partial x} - f_0^2 \frac{\partial u_a}{\partial p} = -2Q_x \quad (2.37)$$

$$Q_x \equiv -\frac{R}{p} \frac{\partial v_g}{\partial x} \cdot \nabla T \quad (2.38)$$

を得る。(2.36) を y , (2.37) を x で微分して加え、連続の式 (2.25) を用いると ω に関する診断の式

$$\left(S_0 \nabla^2 + f_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q} \quad (2.39)$$

を得る。ここで $\mathbf{Q} \equiv (Q_x, Q_y)$ は $\mathbf{Q}$ ベクトルと呼ばれる (Hoskins et al. 1978)。

2.3.2 非地衡風成分の役割

準地衡風方程式系における非地衡風成分の役割について考えよう。非地衡風成分がないとき、(2.33) は地衡風成分のみで強制された気温傾度の時間変化

$$\frac{d_g}{dt} \left(\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = Q_y \quad (2.40)$$

(2.35) は鉛直シアの変化

$$\frac{d_g}{dt} \left(f_0 \frac{\partial u_g}{\partial p} \right) = -Q_y \quad (2.41)$$

を表す。これらは大きさが同じで符号が反対なので、温度風平衡を壊すように働いている。つまり、温度風平衡は非地衡風成分による鉛直循環により維持されている。

2.3.3 $\mathbf{Q}$ ベクトルの見方

高度場や気温の分布が与えられたときに、 $\mathbf{Q}$ ベクトルがどのようなになるか理解するため、簡単な場合について考えてみよう (Sanders and Hoskins 1990)。(2.34) 及び (2.38) で等温線と平行に x 軸をとると $\partial T / \partial x = 0$ となるので

$$\mathbf{Q} = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x}, -\frac{\partial u_g}{\partial x} \right) = -\frac{R}{p} \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right| \left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial x} \right) \quad (2.42)$$

と変形することができる。すなわち、 $\mathbf{Q}$ は左手が寒気となるようにとった x 軸方向に沿う地衡風ベクトルの変化 ($\partial \mathbf{v}_g / \partial x$) を 90° 時計回りに回転 ($-\mathbf{k} \times$) したものに比例 ($R/p |\partial T / \partial y|$) する。

$\mathbf{Q}$ ベクトルの性質をまとめると以下の通りである。

- $\mathbf{Q}$ ベクトルは、収束域で上昇流、発散域で下降流を強制する (2.39)。
- $\mathbf{Q}$ ベクトルは、北風から南風に変わる低気圧の中心では東向き (温度風の向き)、南から北風に変わる高気圧の中心では西向き (温度風と反対向き) となり、低気圧の前面で上昇流、後面で下降流を強制する。(図 2.1a)
- 等温線と等高線が平行で温度移流のない場合でも、風向きが北西から南西に変わる谷 (トラフ) で $\mathbf{Q}$ ベクトルは東向きとなり、低気圧の前面に上昇流を強制する (図 2.1b)。
- 北風と南風とが合流する前線形成場では、東ほど風が強くなるため、 $\mathbf{Q}$ ベクトルは南向きとなり、前線の南の温暖域で上昇流を強制する (図 2.2)。

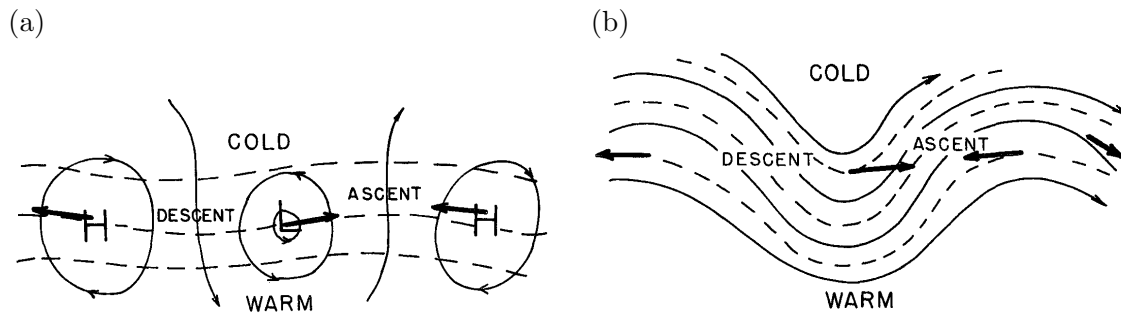


図 2.1 (a) 地表付近の高低気圧の列, (b) 上空の峰や谷の列に伴う Q ベクトル (太矢印)。破線は等温線, 実線は等圧線または等高線を表す。Sanders and Hoskins (1990)

- 暖気に向いた Q ベクトルは前線形成, 等温線と平行な Q ベクトルは不活発, 寒気に向いた Q ベクトルは前線消滅を示す (図 2.3, 2.4)。

2.3.4 実際の例

1975 年 11 月 10 日 0 UTC, 北米東岸の低気圧 (Hoskins and Pedder 1980) の例を図 2.5 に示す。700 hPa 面の谷の後面 (西側) に寒気がある (図 2.5a)。これに対応して, 下降流とこれに対応する Q ベクトルの発散が見られる (図 2.5b, c)。低気圧の前面では, Q ベクトルが収束している。これよりも弱い, 寒冷前線でも Q ベクトルが見られる。等温線を横切っている, 前線形成が示唆される (図 2.5d)。一方, 温暖前線では Q ベクトルは等温線に平行であり重要でないことが分る。

2013 年 1 月 14 日から 1 月 15 日にかけて, 低気圧が日本の南岸で急発達した (図 2.6)。1 月 14 日に 700 hPa の谷は日本列島付近にあり, 西日本に寒気が流入していた (図 2.7a)。これに対応する下降流と Q ベクトルの発散が南西諸島付近で顕著である (図 2.7b, c)。谷に伴う Q ベクトルの値は大きい等温線と平行であり, 重要ではない。寒冷前線に伴う Q は等温線を横切っており, 前線形成が示唆される。実際に日本の東の海上で低気圧が発達し寒冷前線が強化された (図 2.6b)。

課題

- (2.21), (2.22) から絶対渦度方程式を作れ。
- (2.23) を用いて (2.28) を $\partial\phi/\partial p$ で表せ。
- 絶対渦度方程式と $\partial\phi/\partial p$ で表した熱力学の式から時間微分の項を消去して, ω 方程式を導き, (2.39) と比較せよ。
- 低気圧の事例を選んで Q ベクトルを描け。領域はどこでもよい。高度を変えるとどうなるか。
- <http://www.dpac.dpri.kyoto-u.ac.jp/enomoto/lectures/midlat/qvector.tar.bz2>

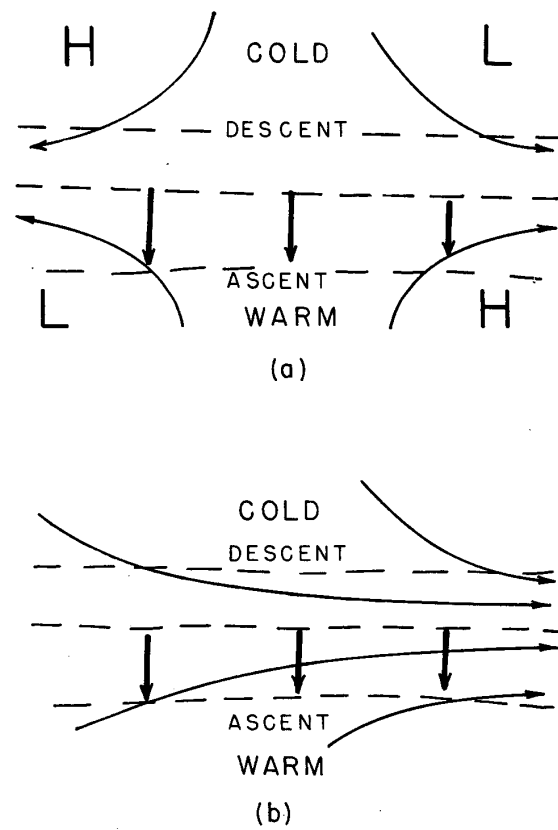


図 2.2 合流 (confluent) 場における前線形成 (a) 地表付近の気圧配置及び (b) 上空のジェット
の入口付近の高度分布に伴う Q ベクトル (太矢印)。破線は等温線, 実線は等圧線または等高線を
表す。Sanders and Hoskins (1990)

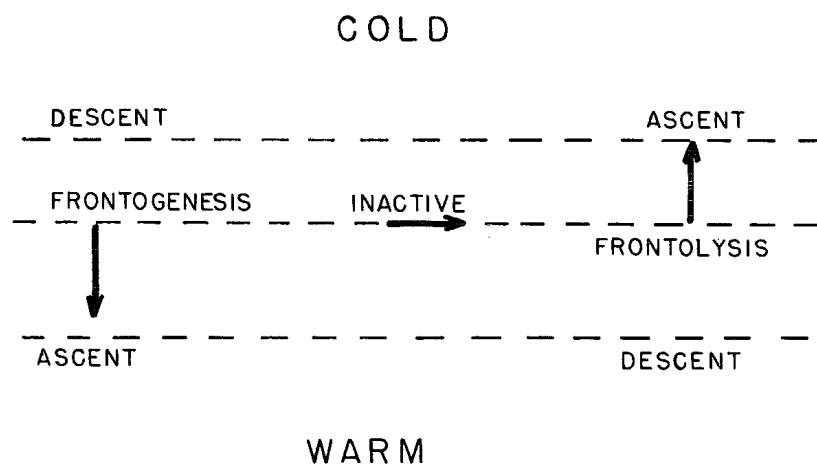


図 2.3 前線形成, 不活発, 及び前線消滅を示す Q ベクトル (太矢印)。破線は等温線を示す。
Sanders and Hoskins (1990)

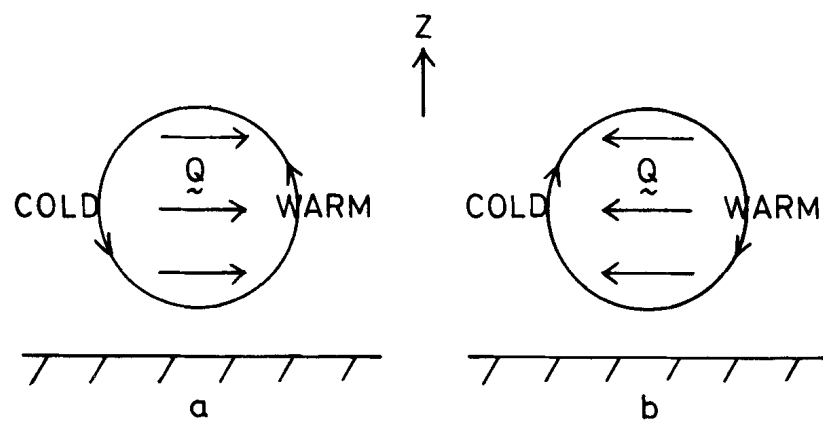


図 2.4 (a) 前線形成及び (b) 前線消滅時における $\tilde{Q}$ ベクトル（太矢印）と鉛直循環。Hoskins and Pedder (1980)

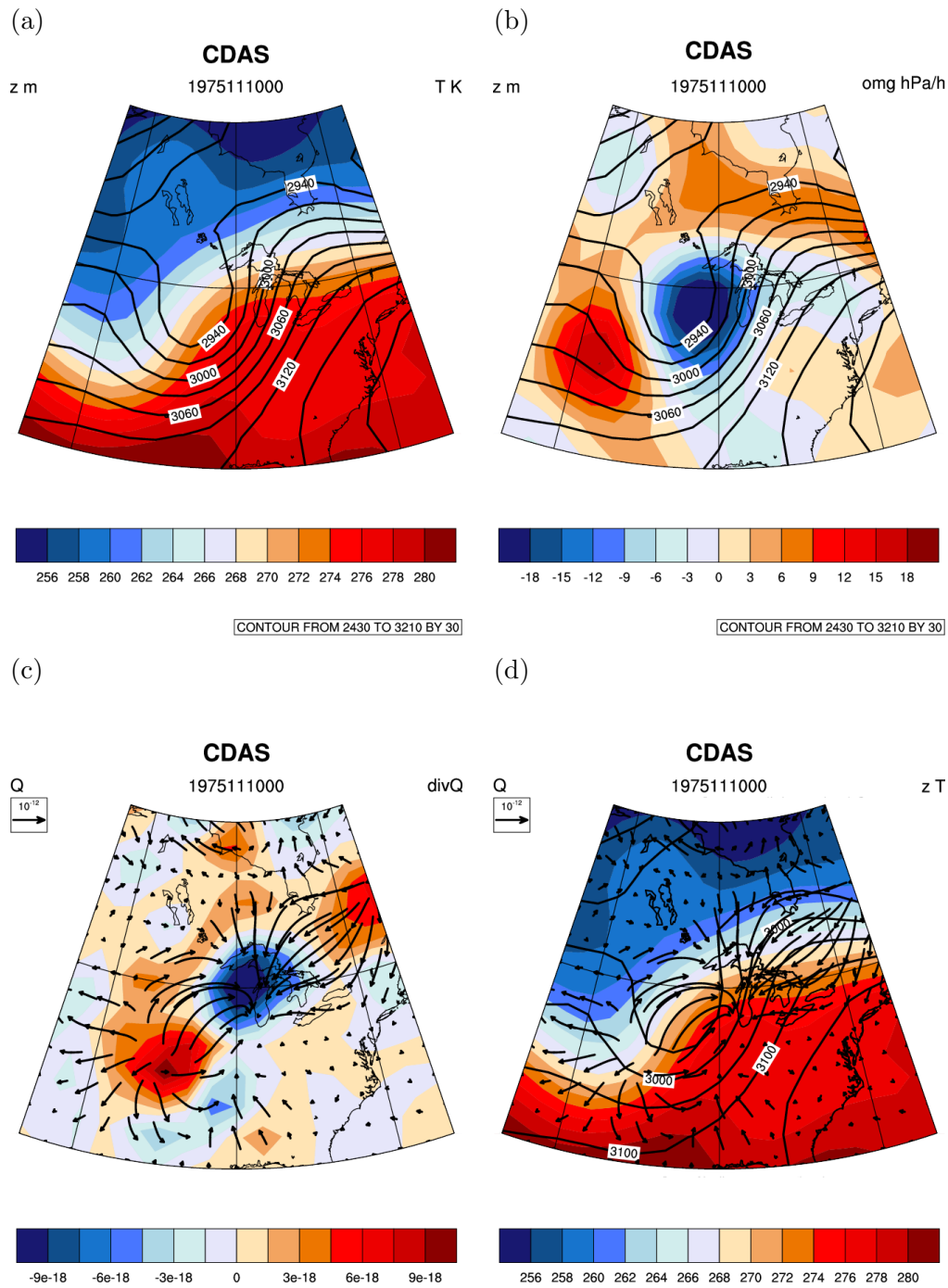
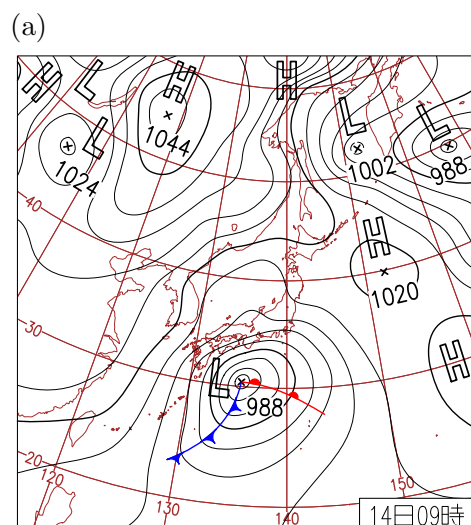
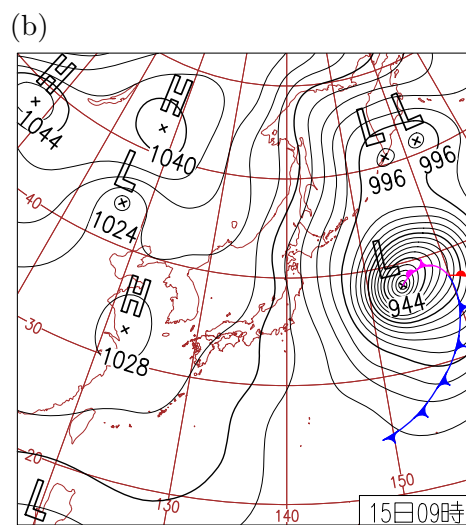


図 2.5 1975 年 11 月 10 日 0 UTC, 30–60°N, 110–70°W における 700 hPa 面 (a) ジオポテンシャル高度 (gpm, 等値線) 及び気温 (K, 色), (b) ジオポテンシャル高度 (gpm, 等値線) 及び鉛直 p 速度 (hPa h⁻¹), (c) Q ベクトル (kg⁻¹m³s⁻³, 矢印) 及びその収束 (kg⁻¹m²s⁻³, 色), (d) Q ベクトル (矢印), ジオポテンシャル高度 (等値線) 及び気温 (色)。NCEP/NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) を用いて作成。



14日(月)東日本は雪の成人式

急速に発達した低気圧により太平洋側は風が強く、関東南部中心に雪。千葉県銚子で最大瞬間風速38.5m/s。横浜・東京で初雪。最深積雪は横浜13cm、東京8cm。



15日(火)冬型の気圧配置へ

低気圧が東海上で発達し、日本付近は冬型の気圧配置となって日本海側では雪。太平洋側は東海・関東を中心に概ね晴れ。北日本を中心に293地点で真冬日。

図 2.6 2013 年 (a)1 月 14 日及び (b)1 月 15 日における海面気圧。高気圧 (H) 低気圧 (L) の中心, 温暖前線 (赤), 及び寒冷前線 (赤) が記されている。日々の天気図 (気象庁)。

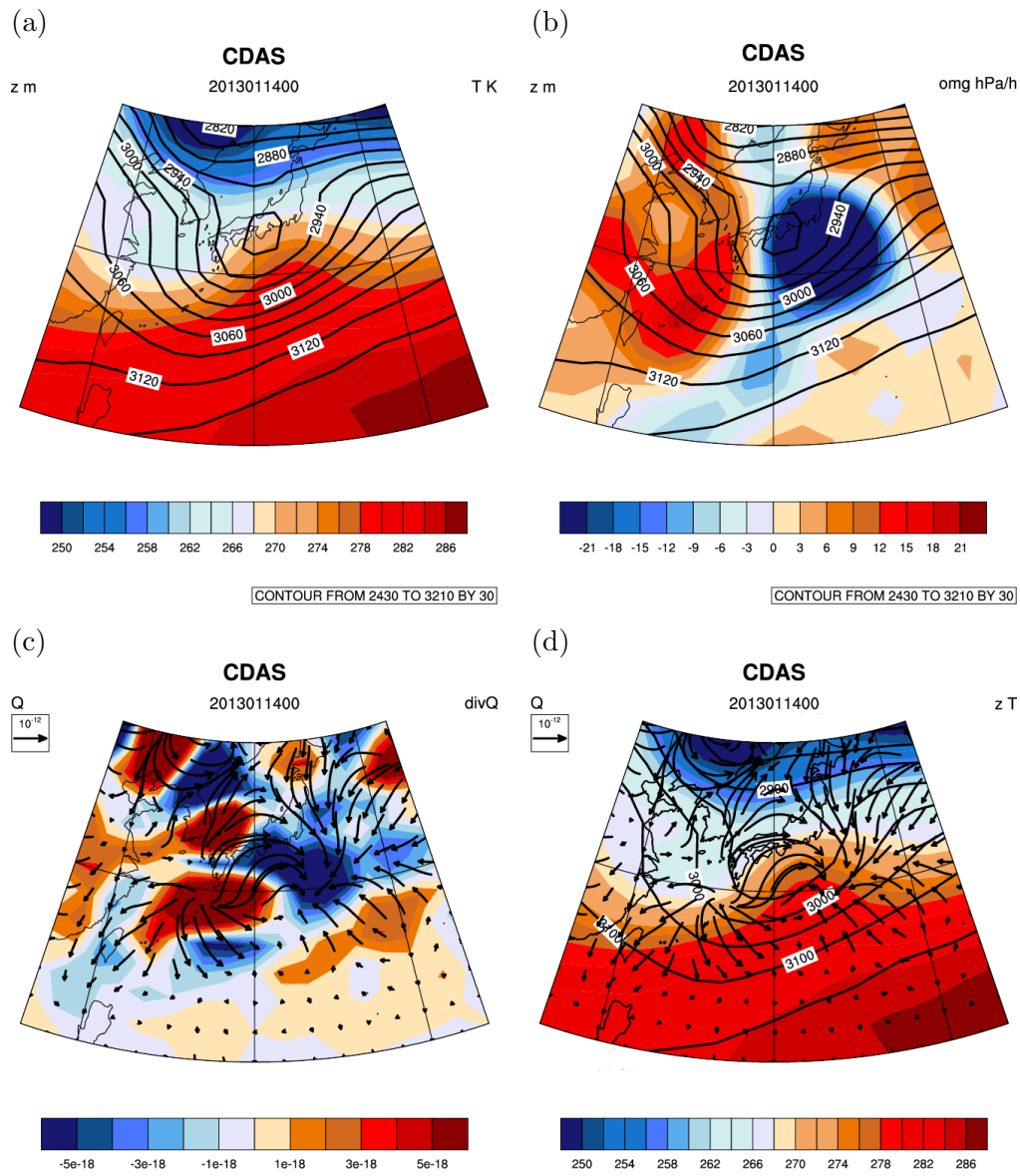


図 2.7 2013 年 1 月 14 日 0 UTC, 15–45°N, 115–155°E における 700 hPa 面 (a) ジオポテンシャル高度 (gpm, 等値線) 及び気温 (K, 色), (b) ジオポテンシャル高度 (gpm, 等値線) 及び鉛直 p 速度 (hPa h⁻¹), (c) Q ベクトル (kg⁻¹m³s⁻³, 矢印) 及びその収束 (kg⁻¹m²s⁻³, 色), (d) Q ベクトル (矢印), ジオポテンシャル高度 (等値線) 及び気温 (色)。NCEP/NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) を用いて作成。

第3章

線型不安定理論

3.1 基礎方程式系

3.1.1 対数気圧座標

傾圧不安定問題では、対数気圧座標

$$z^* = -H \ln \frac{p}{p_{\text{ref}}} \quad (3.1)$$

を用いると便利である。ここで p_{ref} は参照気圧,

$$H = \frac{RT_{\text{ref}}}{g} \quad (3.2)$$

は参照気温 T_{ref} を用いたスケールハイトである。

z^* は p のみの函数なので,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{z^*}, \quad \nabla_p = \nabla_{z^*} \quad (3.3)$$

である。また

$$\frac{\partial}{\partial p} = -\frac{H}{p} \frac{\partial}{\partial z^*}, \quad (3.4)$$

$$\omega = -\frac{p}{H} w^*, \quad w^* \equiv \frac{dz^*}{dt} \quad (3.5)$$

より,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + w^* \frac{\partial}{\partial z^*} \quad (3.6)$$

となる。

運動方程式は, (2.13), 熱力学の式は (2.17) と同形である。

静力学平衡

$$\frac{\partial \phi}{\partial z^*} = \frac{RT}{H} \quad (3.7)$$

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} = 0 \quad (3.8)$$

は

$$\rho_0 \equiv \rho_{\text{ref}} \exp\left(-\frac{z^*}{H}\right) \quad (3.9)$$

を用いると,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\rho_0 w^*)}{\partial z^*} = 0 \quad (3.10)$$

とも書ける。

3.1.2 準地衡渦位方程式

z^* 座標での運動方程式は, (2.21), (2.22), 地衡風成分の連続の式は (2.24) と同形である。非地衡風成分の連続の式は, (2.25) 及び (3.10) より

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_a + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\rho_0 w^*)}{\partial z^*} = 0 \quad (3.11)$$

となる。

熱力学の式は, (2.28) より

$$\frac{d_g}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right) + N^{*2} w^* = \frac{\kappa \dot{Q}}{H} \quad (3.12)$$

と書ける。ここで,

$$N^{*2} \equiv \frac{R}{H} \left(\frac{\partial T}{\partial z^*} + \frac{\kappa T}{H} \right) = \left(\frac{p}{H} \right)^2 S_0 \quad (3.13)$$

$\kappa = R/c_p$ である。

$\partial(2.22)/\partial x - \partial(2.21)/\partial y$ より, 準地衡渦度方程式

$$\frac{d_g \zeta_g}{dt} = \frac{f_0}{\rho_0} \frac{\partial(\rho_0 w^*)}{\partial z^*} - \beta v_g \quad (3.14)$$

が得られる。ここで連続の式 (2.24), (3.11) を用いた。準地衡渦度は

$$\zeta_g \equiv \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial x} = \nabla^2 \frac{\phi}{f_0} \quad (3.15)$$

と定義される。

断熱 ($\dot{Q} = 0$) のとき, (3.14) と (3.12) から w^* を消去すると,

$$\frac{d_g q}{dt} = 0 \quad (3.16)$$

ここで q は, 準地衡渦位

$$q = f_0 + \beta y + \nabla^2 \psi + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\epsilon \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z^*} \right), \quad \epsilon = \frac{f_0^2}{N^{*2}} \quad (3.17)$$

である。非粘性, 断熱の場合, q は保存する。

3.2 線型安定性問題

準地衡流線函数 ψ を東西一様で定常な基本場と擾乱とに分ける。

$$\psi(x, y, z^*, t) = \bar{\psi}(y, z^*) + \psi'(x, y, z^*, t) \quad (3.18)$$

擾乱は微小 $\psi \ll 1$ であるとし、2 次の項は無視する。(3.16) を線型化すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (3.19)$$

となる。ここで、基本場は

$$\bar{u} = \bar{u}(y, z^*) \quad (3.20)$$

のみとする。また、

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\epsilon \rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial z^*} \right) \quad (3.21)$$

は渦位擾乱、

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\epsilon \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \right) \quad (3.22)$$

は基本場の南北渦位勾配である。

南北の境界 $y = \pm L$ で

$$v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad \psi' = 0, \quad (3.23)$$

という側面境界条件を与える。上下端で $w^* = 0$ とし熱力学の式 (3.12) より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z^*} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (3.24)$$

が境界条件となる。

線型安定性問題では、無限小振幅の擾乱に対する基本場 $\bar{u}(y, z^*)$ の安定性を調べる。流れが不安定で擾乱が成長すると、最終的には非線型効果が無視できなくなる。流れが安定でも、有限振幅の擾乱に対しては不安定となる可能性がある。

3.2.1 不安定の必要条件

(3.19) に $\rho_0 \psi'$ をかけて空間積分すると、

$$\frac{\partial E'(\psi')}{\partial t} = \int \int \rho_0 \left[\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z^*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] dy dz^* \quad (3.25)$$

となる。ここで

$$E'(\psi') = \int \int \frac{\rho_0}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + \epsilon \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z^*} \right)^2 \right] dy dz^* \quad (3.26)$$

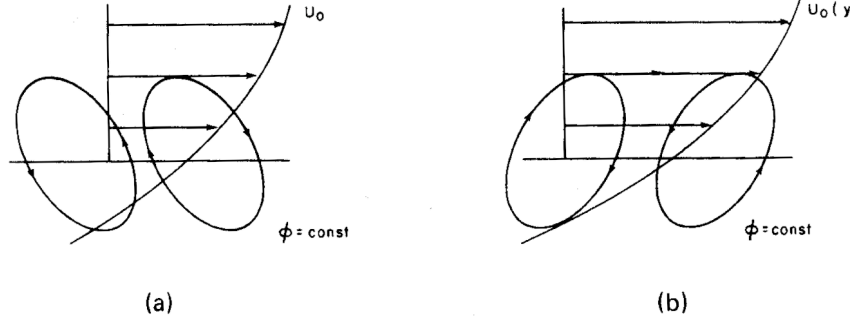


図 3.1 東西風のシアと擾乱の傾きを示す模式図。擾乱が (a) 発達及び (b) 減衰する場合。
Pedlosky (1987) Fig. 7.3.1.

は擾乱の全エネルギーである。

右辺第 1 項は，レイノルズ応力 $-\rho_0 \overline{v'u'}$ と基本東西風の南北シアとの積で擾乱のエネルギーが生じることを示す。この過程を順圧不安定 (barotropic instability) と言う。 $\partial \bar{u} / \partial y > 0$ のところでは， ψ' が北西から南東に傾けば擾乱は発達する。右辺第 2 項は，北向き温度フラックス $\overline{v'T'}$ と基本東西風の鉛直シア (南北温度傾度 $-\partial \bar{T} / \partial y$) との積に比例する擾乱のエネルギーが生ずることを示す。この過程を傾圧不安定 (baroclinic instability) と言う。基本場から擾乱への傾圧エネルギー変換が正になるためには擾乱の軸は西に傾いていなければならない。

ところで，(3.21) より南北渦位フラックスは

$$\rho_0 \overline{v'q'} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x} \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\epsilon \rho_0 \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x} \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial z^*} \right) \quad (3.27)$$

と書ける。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta' = v' \quad (3.28)$$

で定義される南北変位 η' を用いると

$$q' = -\eta' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}, \quad (3.29)$$

$$\overline{v'q'} = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\eta'^2}}{2} \quad (3.30)$$

となる。上下端では，(3.24) より

$$\frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x} \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial z^*} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\eta'^2}}{2} \quad (3.31)$$

となる。(3.27) を子午面積分すると

$$\int \int \rho_0 \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\eta'^2}}{2} dy dz^* - \int \epsilon \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\eta'^2}}{2} dy \Big|_{z^*=0} = 0 \quad (3.32)$$

を得る。ここで，上下端での摩擦がないとき

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \rho_0 \bar{u} dy dz^* = - \int \int \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'u'} dy dz^* = 0 \quad (3.33)$$

であることを用い、 $z^* \rightarrow \infty$ で $\eta' \rightarrow 0$ または $\partial \bar{u} / \partial z \rightarrow 0$ として上端での南北温度フラックスの寄与を無視した。擾乱が成長する ($\partial \bar{\eta}^2 / \partial t > 0$) とき、(3.32) が成り立つためには、以下のいずれか満たさなければならない。

- $z^* = 0$ で $\partial \bar{u} / \partial z^* = 0$ 、即ち下端で南北温度傾度がないとき、 $\partial \bar{q} / \partial y$ は符号を変えなければならない (Rayleigh の必要条件)。
- $\partial \bar{q} / \partial y \geq 0$ がどこでも成り立つとき、下端のどこかで $\partial \bar{u} / \partial z^* > 0$ でなければならない。
- $\partial \bar{u} / \partial z^* < 0$ がどこでも成り立つとき、どこかで $\partial \bar{q} / \partial y < 0$ でなければならない。

(3.22) は

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \epsilon \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^{*2}} + \frac{\epsilon}{H} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} - \frac{\partial \epsilon}{\partial z^*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z^*} \quad (3.34)$$

と書ける。 $\beta > 0$ なので $\partial \bar{q} / \partial y < 0$ となるのは、曲率の大きなところである。ジェットは大きな南北シアを伴うことがあり、順圧不安定を起こすことがある。中緯度における傾圧不安定は、通常 $\partial \bar{q} / \partial y > 0$ で下端に西風シア $\partial \bar{u} / \partial z^* > 0$ (南北温度傾度) を伴うところで生ずる。

3.2.2 Eady 問題

Eady (1949) は以下のような仮定をおいて、線型安定性問題を解いた。

- 基本場の密度一定 (Boussinesq 近似)
- f 平面 ($\beta = 0$)
- 鉛直シア一定 ($\bar{u} = \Lambda z^*$)
- $z^* = 0$ と $z^* = H$ は平坦な剛体底・天井 (rigid lid)。

この仮定の下では、擾乱の渦位方程式 (3.19) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda z^* \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\nabla^2 \psi' + \epsilon \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^{*2}} \right) = 0, \quad (3.35)$$

境界条件は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda z^* \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z^*} - \Lambda \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (3.36)$$

である。

ここで波動解

$$\psi' = \Re \Psi(z^*) \exp[i(kx + ly - kct)] \quad (3.37)$$

を仮定すると (3.35) は

$$\left(\frac{d^2}{dz^{*2}} - \mu^2 \right) \Psi = 0, \quad \mu^2 \equiv \frac{k^2 + l^2}{\epsilon} \quad (3.38)$$

(3.36) は

$$(\Lambda z - c) \frac{d\Psi}{dz^*} - \Lambda \Psi = 0, \quad z^* = 0, H \quad (3.39)$$

となる。

(3.38) の一般解は

$$\Psi(z^*) = a \cosh \mu z^* + b \sinh \mu z^* \quad (3.40)$$

と書ける。これを z^* で微分すると

$$\frac{d\Psi}{dz^*} = a\mu \sinh \mu z^* + b\mu \cosh \mu z^* \quad (3.41)$$

となる。(3.40), (3.41) を用いると, (3.39) は

$$\begin{pmatrix} \Lambda & c\mu \\ (\Lambda H - c)\mu \sinh(\mu H) - \Lambda \cosh(\mu H) & (\Lambda H - c)\mu \cosh(\mu H) - \Lambda \sinh(\mu H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (3.42)$$

と書ける。非自明解は

$$c^2 - \Lambda H c + \frac{\Lambda^2 H}{\mu} \coth(\mu H) - \frac{\Lambda^2}{\mu^2} = 0 \quad (3.43)$$

の解で

$$c = \frac{\Lambda H}{2} \pm \frac{\Lambda}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\mu H}{2} - \tanh \frac{\mu H}{2}\right) \left(\frac{\mu H}{2} - \coth \frac{\mu H}{2}\right)} \quad (3.44)$$

となる。(3.44) を求める際

$$\coth x = \frac{1}{2} \left(\tanh \frac{x}{2} + \coth \frac{x}{2} \right) \quad (3.45)$$

を用いた。 $\mu H/2 \geq \tanh(\mu H)$ なので, $\mu H/2 > \coth(\mu H)$ のとき, 二つの解はともに実数である。 μH が大きくなると二つの解は, 底と天井の風速に漸近する。

虚部が現れる臨界値は $\mu_c H/2 = \coth(\mu_c H/2)$ より

$$\mu_c H \approx 2.3994 \quad (3.46)$$

で, $\mu < \mu_c$ のとき波は発達する。

$l = 0$ のとき

$$\frac{\Lambda}{\mu} = \frac{\Lambda f_0}{k N^*} \quad (3.47)$$

なので, 成長率は

$$k_{ci} = \frac{\Lambda f_0}{N} \sqrt{\left(\frac{\mu H}{2} - \tanh \frac{\mu H}{2}\right) \left(\frac{\mu H}{2} - \coth \frac{\mu H}{2}\right)} \quad (3.48)$$

となる。(3.48) が最大になる波数は

$$\mu H = k_m \frac{N^* H}{f_0} \approx 1.6061 \quad (3.49)$$

で, このときの成長率は

$$k_{mci} \frac{N^*}{\Lambda f_0} \approx 0.30982 \quad (3.50)$$

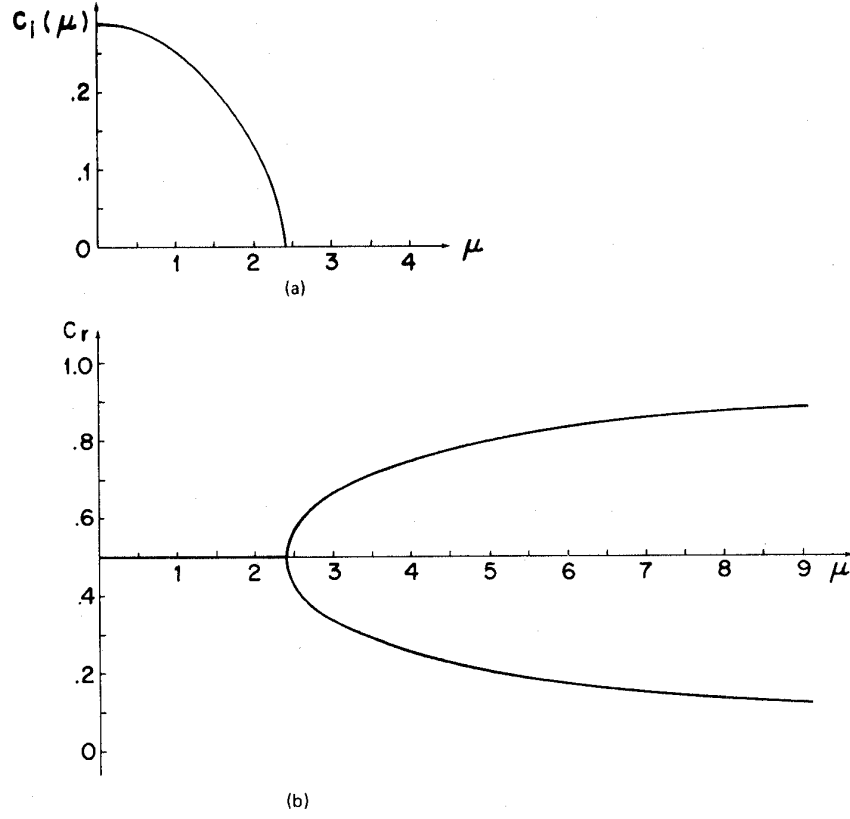


図 3.2 c の虚部 c_i (上) と c の実部 c_r (下)。 μ は μH に対応する。Pedlosky (1987) Fig. 7.7.1.

(3.49) は, Rossby の変形半径を $NH/f \approx 10^6$ とすると, 約 4000 km となる。成長率は, およそ 1 day^{-1} である。

(3.42) より $b = -\Lambda a / \mu c$ なので

$$\Psi(z^*) = \cosh(\mu z^*) - \frac{\Lambda}{\mu c} \sinh(\mu z^*) \quad (3.51)$$

$$= \left(\cosh(\mu z^*) - \frac{\Lambda c_r}{\mu |c|^2} \sinh(\mu z^*) \right) + i \frac{\Lambda c_i}{\mu |c|^2} \sinh(\mu z^*) \quad (3.52)$$

となる。ここで

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_r + i c_i} = \frac{c_r - i c_i}{|c|^2} \quad (3.53)$$

を用いた。線型論では, 擾乱の振幅は求まらないことに注意する。 ψ' は

$$\psi' = \Re \exp(k c_i t) \cos(l y) \Psi(z^*) \exp[i k (x - c_r t)] \quad (3.54)$$

$$= \exp(k c_i t) |\Psi(z^*)| \cos(l y) \cos[k x + \alpha(z^*) - k c_r t] \quad (3.55)$$

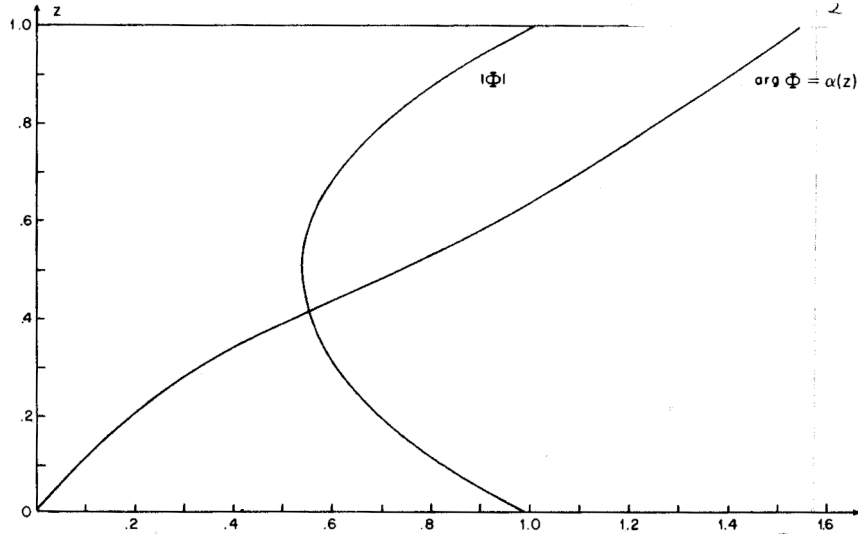


図 3.3 振幅と位相角の高さ依存性。図の z は z^*H^{-1} に、 Φ は Ψ に対応する。Pedlosky (1987) Fig. 7.7.2b.

と書ける。ここで

$$|\Psi(z)|^2 = \left(\cosh(\mu z^*) - \frac{\Lambda c_r}{\mu |c|^2} \sinh(\mu z^*) \right)^2 + \frac{\Lambda^2 c_i^2}{\mu^2 |c|^4} \sinh^2(\mu z^*) \quad (3.56)$$

$$\tan \alpha(z^*) = \frac{\Lambda c_i}{\mu |c|^2 \coth(\mu z^*) - \Lambda c_r} \quad (3.57)$$

である。

図 3.3 から分るように、位相角 $\alpha(z^*)$ は高さとともに単調に増加する。各時刻で等位相線 $kx + \alpha(z^*) + \text{const}$,

$$x = -\frac{\alpha(z^*)}{k} + \text{const} \quad (3.58)$$

となるので、等位相線は西に傾くことが分る。

(3.55) を x, y, z で微分し、運動量及び熱フラックスを計算する。 u' と v' は 90° 位相がずれているので、

$$\overline{\rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y}} = 0 \quad (3.59)$$

である。熱フラックスは

$$\overline{\rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z^*}} = \rho_0 \exp(2k c_i t) \frac{|\Psi(z^*)|^2}{2} k \frac{\partial \alpha(z^*)}{\partial z^*} \cos^2(l y) \quad (3.60)$$

と書ける。 $\partial \alpha / \partial z^*$ は正なので、熱フラックスは北向きで、基本場の温度傾度と逆方向である。(3.56)

と (3.57) を用いると、熱フラックスは高さに依存しないことを示すことができる。Eady 問題では $\partial \bar{q} / \partial y = 0$ なので、渦位フラックス

$$\overline{v' q'} = 0 \quad (3.61)$$

である。

課題

- (3.46) の $\mu_c H \approx 2.3994$ を数値的に求めよ。
- (3.59), (3.60) を示せ。

第 4 章

東西平均循環

4.1 Euler 平均

z^* 座標における東西方向の運動方程式 (2.21) と熱力学の式 (3.12) を東西平均すると,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v} = -\frac{\partial \bar{v}'u'}{\partial y} + \bar{X} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{N^2 H}{R} \bar{w} = -\frac{\partial \bar{v}'T'}{\partial y} + \frac{\bar{Q}}{c_p} \quad (4.2)$$

が得られる。ここで $\bar{X}$ は摩擦のような外力を表す。ここでは簡単のため、地衡風成分、非地衡風成分を表す $g, a, \log p$ 座標を表す * は省略する（後で、* は別の意味に用いる）。

定常状態 $\partial/\partial t = 0$ を考え、(4.1) と (4.2) から非地衡風平均子午面循環がどのようなになるか考えてみよう。低緯度では、潜熱加熱 ($\bar{Q} > 0$) により上昇流が生じ、放射冷却 ($\bar{Q} < 0$) により下降流が出来る (図 4.1a, b)。この熱的直接循環を Hadley 循環と呼ぶ。

図 4.2 に、気候学的な北半球冬季 (12~2 月) の東西平均された東西風、南北風、北向き運動量フラックス、熱フラックスを示す。中緯度上部対流圏に極大を持つ東西風 (4.2a) は、亜熱帯ジェットと呼ばれる (4.2a)。上部対流圏には、ハドレー循環に伴い夏半球から冬半球に向かう南北風が存在する

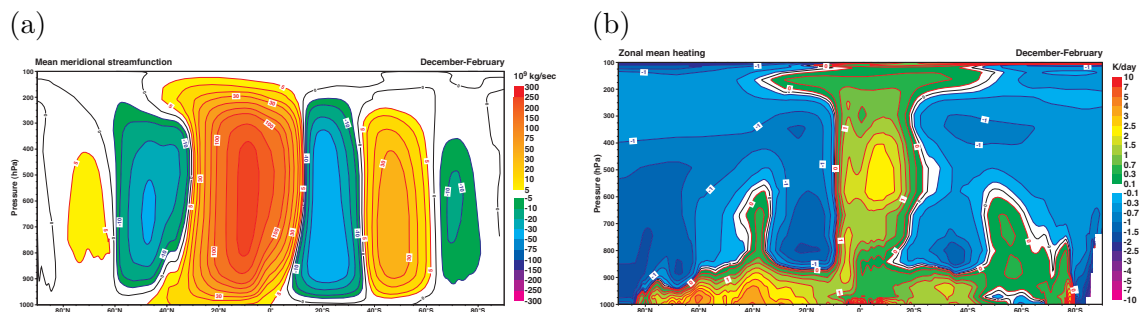


図 4.1 ERA-40(Uppala et al. 2005) における気候学的な北半球冬季 (12~2 月) の (a) 子午面質量流線函数 (b) 東西平均された非断熱加熱 (K day^{-1}) (Källberg et al. 2005)。

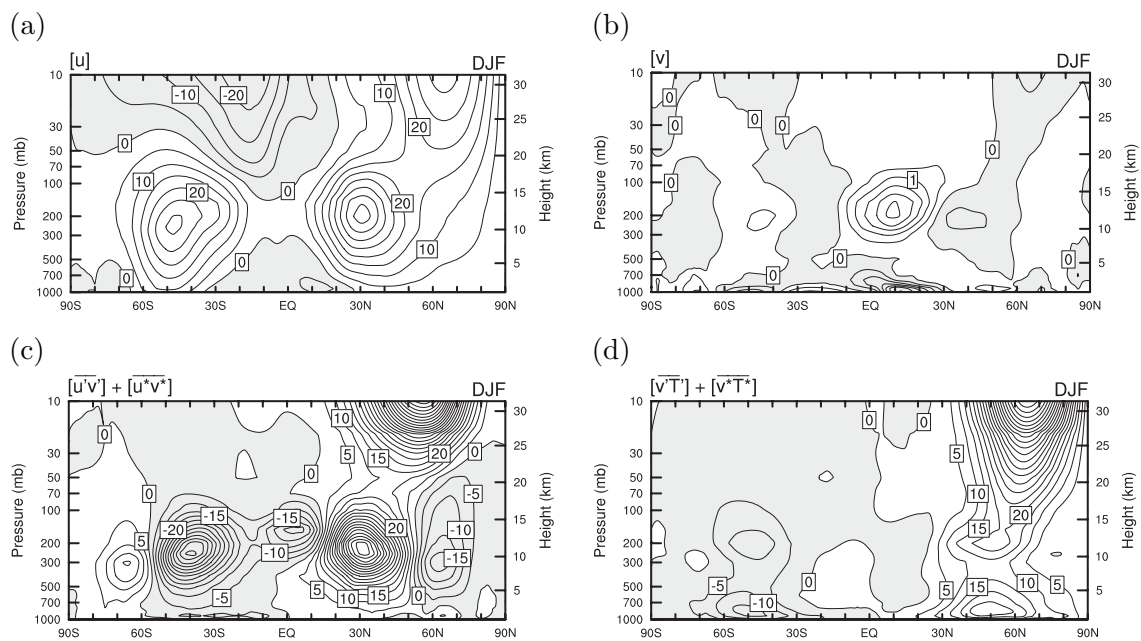


図 4.2 ERA-40 における気候学的な北半球冬季 (12~2 月) の東西平均された (a) 東西風 (m s^{-1}), (b) 南北風 (m s^{-1}), 北向き (c) 運動量フラックス (m^2s^{-2}), (d) 熱フラックス (K m s^{-1}) (Hartmann 2007)。

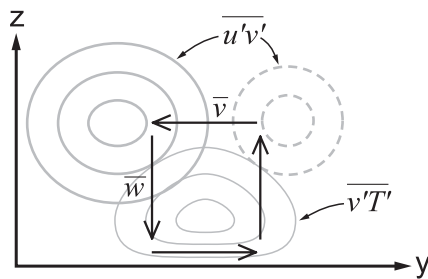


図 4.3 熱（細い等値線）と運動量（太い等値線）フラックスと Ferrel 循環（矢印）を示す模式図 (Hartmann 2007)。

(4.2b)。ハドレー循環は、赤道よりやや北で上昇し亜熱帯で下降する赤道対称な成分 (1.1%) とモンスーンによって作られ季節により向きが反転する成分 (97.4%) からなる (Dima and Wallace 2003)。亜熱帯ジェットは、ハドレー循環の下降域に位置している。

北半球冬季の中緯度では、50N を中心に主に傾圧性擾乱に伴う北向き熱フラックスが存在する (4.2d)。熱フラックスは、中高緯度で上昇、亜熱帯で下降となる熱的間接循環 Ferrel 循環を駆動する。上部対流圏では、運動量フラックスの発散と赤道向きの流れに伴うコリオリ力とが、地表付近では摩擦と極向きの流れに伴うコリオリ力とがほぼ釣り合っており、間接循環と整合的である (図 4.3)。

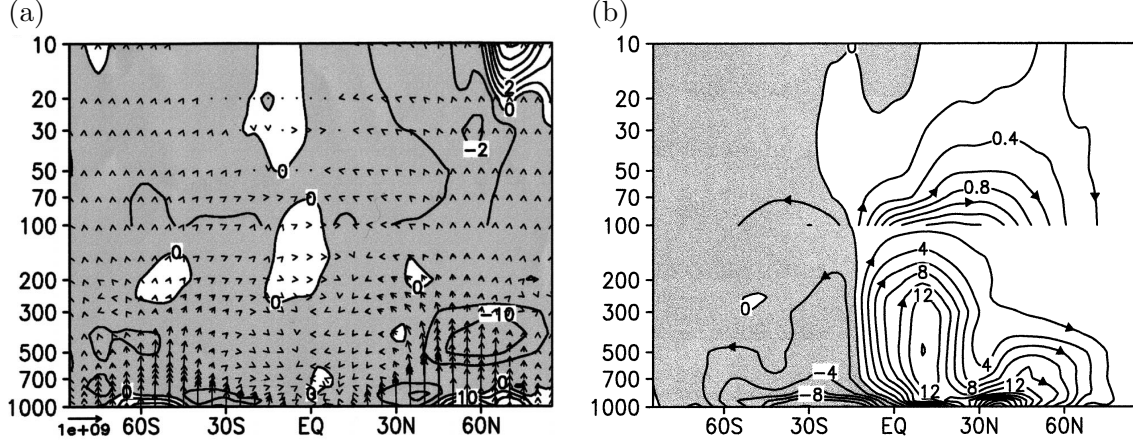


図 4.4 北半球冬季における (a)EP フラックス (kg s^{-2} , 矢印) とその発散 ($\text{m s}^{-1} \text{ day}^{-1}$), 並びに (b)TEM 方程式系の質量流線函数 ($10^{10} \text{ kg s}^{-1}$)。ERA-40 より作成 (Tanaka et al. 2004)。

4.2 変形された Euler 平均

(4.2) において, 中高緯度では熱フラックスの発散収束と子午面循環とは打ち消し合う関係にある。そこで, 熱フラックスの発散収束の効果を差し引いた残差子午面循環を次のように定義する。

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{R}{\rho_0 H} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_0 \overline{v' T'}}{N^2} \quad (4.3)$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} + \frac{R}{H} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\overline{v' T'}}{N^2} \quad (4.4)$$

(4.3), (4.4) を (4.1), (4.2) に代入すると, 変形された Euler 平均 (TEM, Transform Eulerian Mean) 方程式系

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v}^* = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F} + \bar{X} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{N^2 H}{R} \bar{w}^* = \frac{\dot{Q}}{c_p} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 \bar{w}^*}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

を得る。ここで $\mathbf{F}$ は Eliassen–Palm フラックス (EP フラックス)

$$\mathbf{F} = (-\rho_0 \overline{v' u'}, \frac{\rho_0 f_0 R}{N^2 H} \overline{v' T'}) \quad (4.8)$$

である。

TEM 方程式系では, 運動量フラックスと熱フラックスとは, EP フラックスの発散の形で東西風を変化させる (4.5)。図 4.4 に, 北半球冬季における EP フラックスとその発散, 並びに TEM 方程式

系の質量流線関数を掲げる。中高緯度では、対流圏下層を除いて、EP フラックスは収束している (図 4.4a)。EP フラックスの収束による西風減速効果は、残差平均子午面循環によるコリオリ力とバランスしている。残差平均された鉛直流は (図 4.4b)、定常状態では非断熱加熱の時間変化 (図 4.1) に比例して生ずる (4.6)。単なる Euler 平均子午面循環には波の作用が含まれていたのに対し、TEM 方程式系の残差子午面循環は空気塊の動きを表しており、近似的なトレーサの移流に対応している。

4.3 東西平均渦位方程式

東西された準地衡平均渦位方程式は (3.14) より

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{q'v'} \quad (4.9)$$

と書ける。渦位擾乱 (3.21) に v' をかけて東西平均をとると

$$\overline{v'q'} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{v'u'} + \frac{f_0 R}{\rho_0 H} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho}{N^2} \overline{v'T'} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (4.10)$$

と書ける。即ち渦位フラックスは、EP フラックスの発散に比例する。

第 5 章

ロスビー波の伝播

5.1 分散関係式

線型化された準地衡渦位方程式 (3.19) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$$

ここで

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\epsilon \rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial z^*} \right),$$

は渦位擾乱 (3.21), $\partial \bar{q} / \partial y$ は, 基本場の南北渦位勾配 (3.22) である。

N^2 一定, 即ち ϵ が一定のとき, 波動解

$$\psi' = \Re \Psi e^{z/2H} e^{i(kx + ly + mz - \omega t)} \quad (5.1)$$

を (3.19), (3.21) に代入すると, 分散関係式

$$\omega = k\bar{u} - \frac{k \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \epsilon \left(m^2 + \frac{1}{4H^2} \right)} \quad (5.2)$$

が得られる。

5.2 ロスビー波の鉛直伝播

(5.2) を見ると, 波数により位相速度が異なる。波数の異なる波で構成されている波束は, その形が時間とともに崩れていく。このような性質を「分散性」と呼ぶ。波束が形を変えていく過程で, 振幅の強め合いや弱め合いが起きるので, それぞれの波長の波の位相速度とエネルギーの伝わる速度 (群速度) とは向きや大きさが当然異なる。エネルギーの移動は, 波の山谷ひとつひとつではなく, 波束の輪郭の移動により表わされる (図 5.1)。

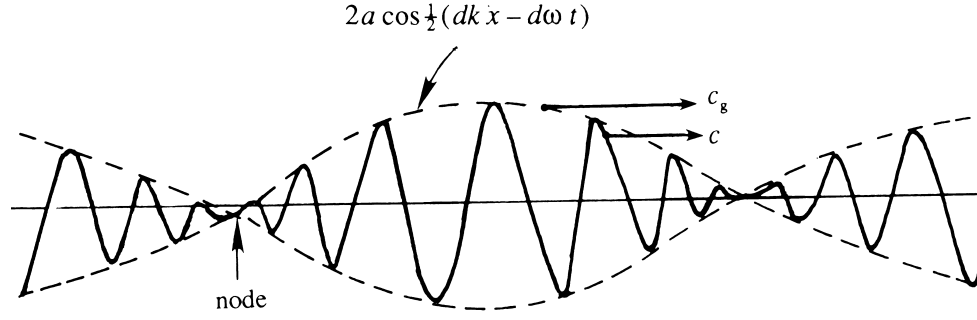


図 5.1 2つの位相速度を持つ波の重ね合わせにより作られた, 連続した波束 (Kundu 1990). 破線
は波 (実線) の包絡線を表す。

(5.2) を微分して, 群速度を求める。

$$c_{gy} = \frac{2\partial\bar{q}/\partial y}{[k^2 + l^2 + \varepsilon(m^2 + \frac{1}{4H^2})]^2} kl \quad (5.3)$$

$$c_{gz} = \frac{2\varepsilon\partial\bar{q}/\partial y}{[k^2 + l^2 + \varepsilon(m^2 + \frac{1}{4H^2})]^2} km \quad (5.4)$$

波動解 (5.2) は

$$\psi' = \frac{\Psi}{2} e^{z/2H} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \quad (5.5)$$

と書ける。ここで

$$\phi \equiv kx + ly + mz - \omega t \quad (5.6)$$

である。波動解を用いると, 運動量フラックス及び熱フラックスは

$$\overline{v'u'} = -\frac{\Psi^2}{2} e^{z/H} kl \quad (5.7)$$

$$\overline{v'T'} = \frac{f_0 H \Psi^2}{2R} e^{z/H} km \quad (5.8)$$

となる。したがって (5.3), (5.4), (5.7), (5.8) より

$$(c_{gy}, c_{gz}) = \frac{4\partial\bar{q}/\partial y}{\Psi^2 [k^2 + l^2 + \varepsilon(m^2 + \frac{1}{4H^2})]^2} (-\overline{v'u'}, \frac{f_0 R}{N^2 H} \overline{v'T'}) \quad (5.9)$$

が得られる。(5.9) より, Eliassen-Palm フラックス $\mathbf{F}$ の向きは局所的な群速度の向きを表すことが
分かる。

5.3 ロスビー波の水平伝播

5.3.1 順圧渦度方程式

ロスビー波の水平伝播は，順圧渦度方程式で記述できる。南北シアーを持つ基本場の東西風 $\bar{u} = \bar{u}(y)$ のまわりで線型化された順圧渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi' + \beta_{\text{eff}} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (5.10)$$

を考える。ここで

$$\beta_{\text{eff}} = \frac{\partial(f + \bar{\zeta})}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (5.11)$$

は実効ベータ (effective beta) と呼ばれる。

x, y 方向に波動解を仮定して，分散関係を求める。波動解を

$$\psi' = \Re \hat{\psi} \exp i(kx + ly - \omega t) \quad (5.12)$$

とし，(5.10) に代入すると，分散関係式

$$\omega = k\bar{u} - \frac{k\beta_{\text{eff}}}{k^2 + l^2} \quad (5.13)$$

を得る。

5.3.2 ロスビー波の西進

(5.13) を k で割って東向き有位相速度 c_x を求めると，

$$c_x - \bar{u} = -\frac{\beta_{\text{eff}}}{k^2 + l^2} < 0 \quad (5.14)$$

が得られる。東西風に相対的な位相速度 $c_x - \bar{u}$ は負なので，ロスビー波は西進する。

(5.13) を k, l で微分して， x 方向の群速度 c_{gx} ， y 方向の群速度 c_{gy} を求める。

$$c_{gx} = \bar{u} - \frac{\beta_{\text{eff}}[l^2 - k^2]}{[k^2 + l^2]^2}, \quad (5.15)$$

$$c_{gy} = \frac{2kl\beta_{\text{eff}}}{[k^2 + l^2]^2} \quad (5.16)$$

を得る。東西位相速度 c_x が常に負であったのに対し，波の形状 (k, l) により，東西風に相対的な東西群速度は西向きにも東向きにもなりうる。

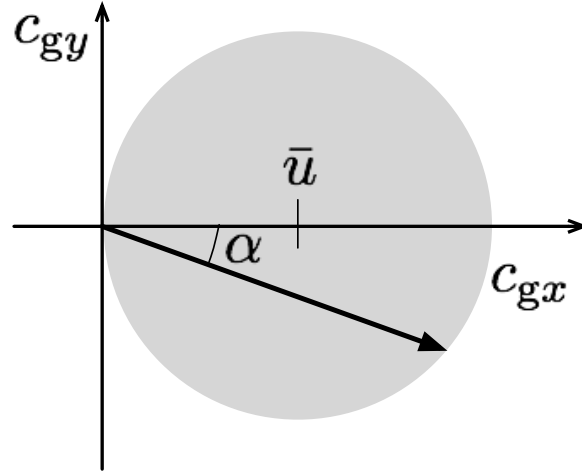


図 5.2 群速度と東西風速との関係.

5.3.3 定常ロスビー波

位相速度 $c_x = 0$ のとき

$$\bar{u} = \frac{\beta_{\text{eff}}}{k_s^2} \quad (5.17)$$

が成り立つ。このようなロスビー波を定常ロスビー波と呼ぶ。ここで

$$k_s^2 \equiv k^2 + l^2 = \frac{\beta_{\text{eff}}}{\bar{u}} \quad (5.18)$$

を定常ロスビー波数と呼ぶ。これを (5.15), (5.16) に代入すると,

$$\mathbf{c}_g = 2\bar{u} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \frac{k}{k_s^2} \quad (5.19)$$

となる。定常ロスビー波の向きは常に東向きで, x 軸方向 (東向き) に伝播するとき $|\mathbf{c}_g|$ は最大値 $2\bar{u}$ を取ることが分かる。

定常ロスビー波の伝播は, Snell の法則に従う光波に類似している (Hoskins and Ambrizzi 1993)。式 (5.19) は

$$\mathbf{c}_g = 2\bar{u} \begin{pmatrix} \frac{k}{k_s} \\ \frac{l}{k_s} \end{pmatrix} \frac{k}{k_s} \quad (5.20)$$

$$= 2\bar{u} \begin{pmatrix} \hat{k} \\ \hat{l} \end{pmatrix} \cos \alpha \quad (5.21)$$

と書ける。 $(\hat{k}, \hat{l})$ は単位ベクトルなので, 波は x 軸に対して α の角度で伝播することが分かる。 $\cos \alpha$ の定義より

$$k = k_s \cos \alpha = \text{const} \quad (5.22)$$

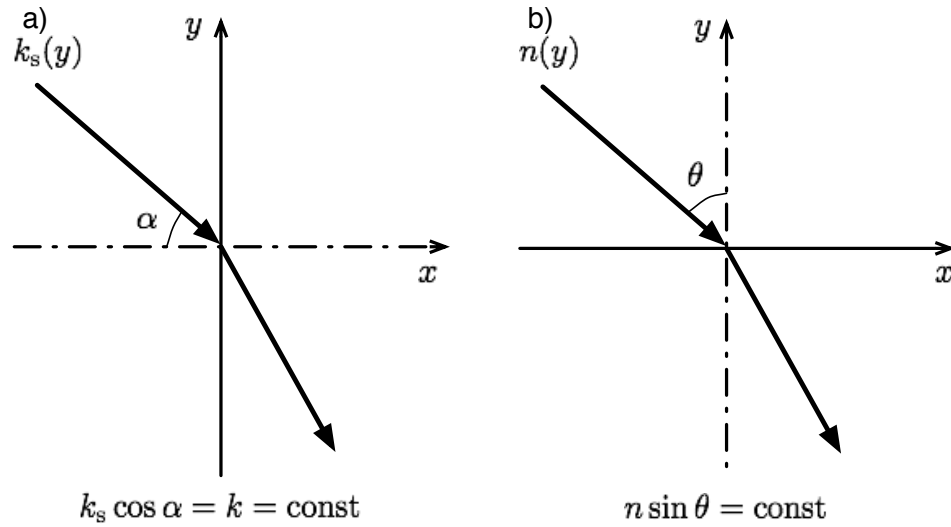


図 5.3 (a) ロスビー波の伝播と (b) 光波の伝播との類比。

と書ける。これは、屈折率 n , y 軸に対する角度 θ で伝播する光波について成り立つ Snell の法則

$$n \sin \theta = \text{const} \quad (5.23)$$

と同形である。式 (5.22) と (5.23) とを比較すると、定常ロスビー波数 k_s が屈折率に相当することが分かる。

光波同様、定常ロスビー波も k_s の大きなところに向かって伝播する (Fermat の原理, 図 5.4A)。 k_s の極大があれば、そこに捕捉される (図 5.4E)。このように「鋭い」偏西風は、「導波管」と呼ばれる。

式 (5.18) を l について解くと、

$$l = \pm \sqrt{k_s^2 - k^2} \quad (5.24)$$

となる。 $l > 0$ のとき北向き、 $l < 0$ のとき南向き伝播を表す。通常対流圏上層では、 k_s は中緯度から亜熱帯に向かって増加している (図 5.5)。高緯度に向かって k_s が減少して、 $k = k_s$ となる緯度を転移緯度 (turning latitude) と呼ぶ。転移緯度より極よりでは、振幅が指数函数的に減少 (evanescent) する。転移緯度では、 l が符号を変え、波の向きが変わるため、波は低緯度に反射される (図 5.4B)。実効ベータが負になる領域も波の反射板 (reflector) として働く (図 5.4C)。一方、赤道付近に東風域と中緯度の西風との間に $\bar{u} = 0$ となる緯度 (臨界緯度 critical latitude) が存在する。臨界緯度に近づくと、式 (5.18) から明らかなように、 k_s が急速に大きくなる。臨界緯度は定常ロスビー波の「ブラックホール」である (図 5.4D)。

非線型性を考慮すると、波は臨界緯度付近の南北に狭い領域で、進む向きが逆転して反射されることが示されている (図 5.6, Stewartson 1978, Warn and Warn 1978; SWW 解)。SWW 解は、Kelvin の猫目 (cat's eye) と呼ばれる流れのパターンである。

5.3.4 北半球冬季・夏季の導波管

ここでは、北半球対流圏上部における定常ロスビー波の気候学的な通り道を調べておこう (図 5.7)。

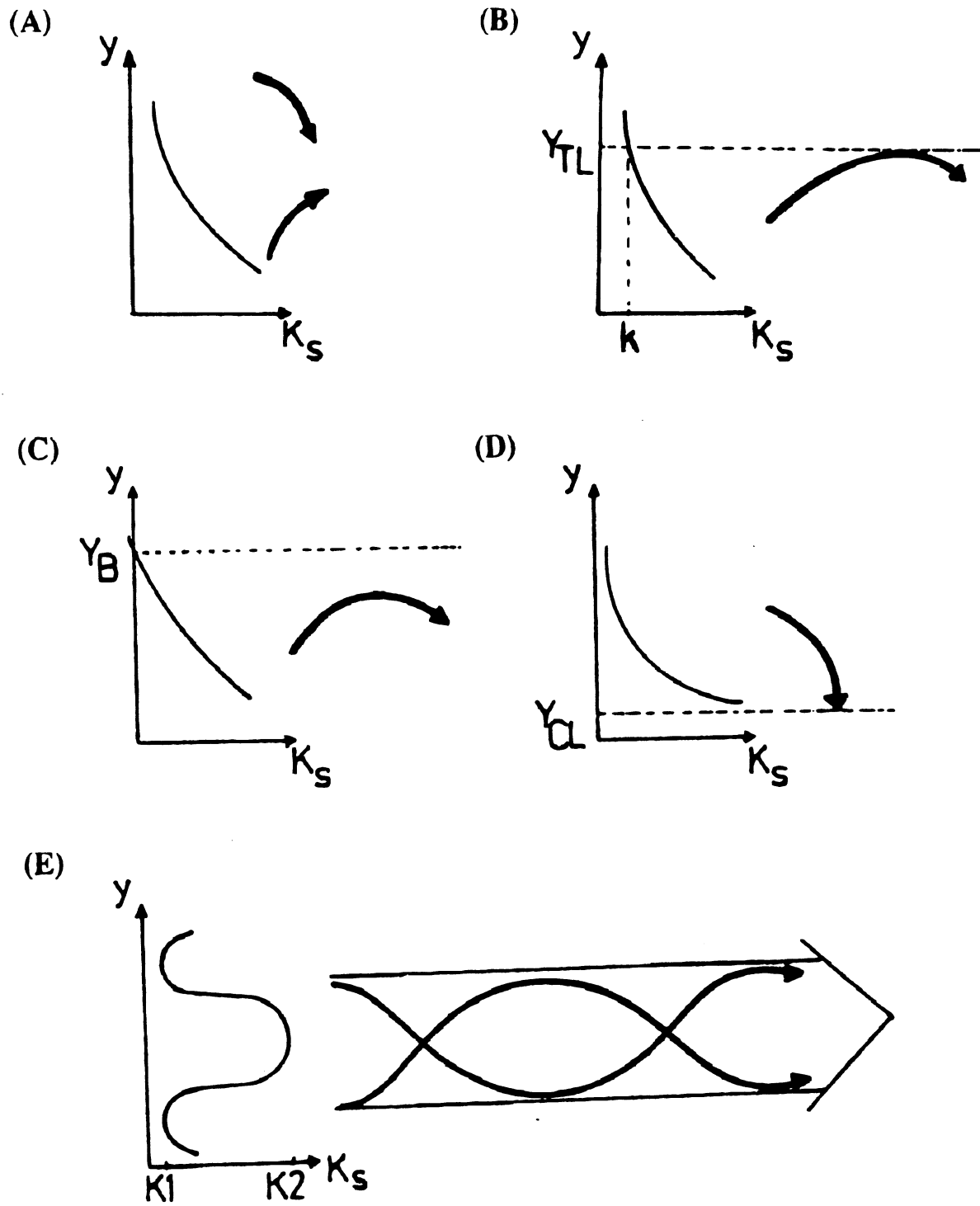


図 5.4 定常ロスビー波の屈折や反射 (Hoskins and Ambrizzi 1993)。(A) 屈折, (B) 転移緯度での反射, (C) $\beta_{eff} = 0$ となる緯度での反射, (D) 臨界緯度での吸収, (E) ジェット気流によるロスビー波の捕捉。

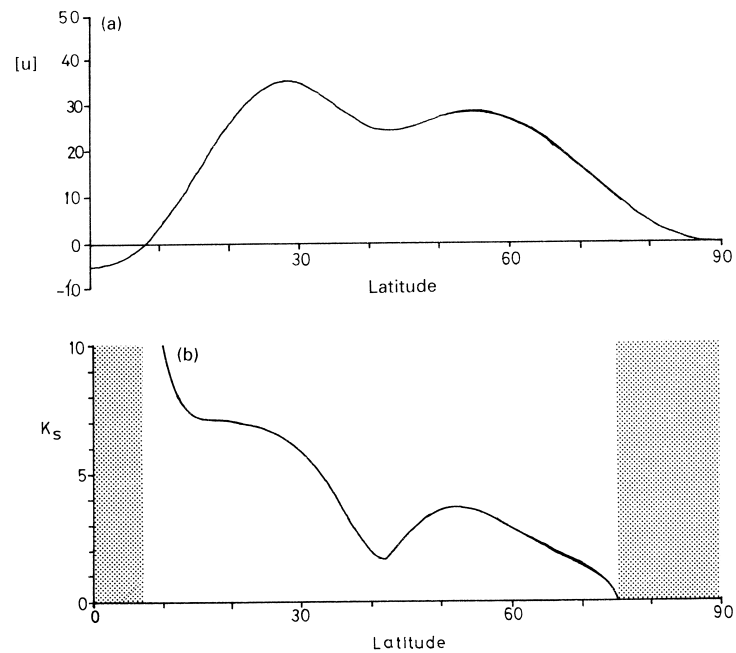


図 5.5 南半球冬季における帯状平均 (a) 東西風速 (m s^{-1}) 及び (b) 定常ロスビー波数 k_s の南北分布 (James 1994)。

北半球冬季には、日本付近と北米東岸に東西風の極大がある。 β_{eff} で見ると、極大の南北両側で負となる領域がある。このような領域は、図 5.4E のような導波管の構造をしている。太平洋東部には、 k_s の大きな領域が赤道まで伸びている。この領域は西風ダクト (westerly duct) と呼ばれており、両半球の間でエネルギー交換が行われると考えられている。エルニーニョ等の年々変動により、西風ダクトが出来ない年もある。

北半球夏季には、チベット高気圧の北縁に東西風の極大が存在している。風速は、冬季ほど大きくはないが、 k_s では同程度の大きさである。値は小さいが、北極海沿岸にも波の伝播可能域が存在することも注目に値する。太平洋の導波管は、亜熱帯から伸び、北大西洋の導波管につながり、北太平洋の導波管は、亜寒帯ジェットに伴う北極海沿岸に連なる渦巻き構造をしている。

課題

以下のいずれかの課題を一つ選び簡潔にまとめよ。

- この 1 年間に日本に接近した顕著な温帯低気圧について、その発達過程を線型不安定論と比較せよ。
- 2015 年 12 月～2016 年 2 月の平均の東西平均された東西風、南北風、運動量フラックス、熱フラックス、EP フラックスを描画し、気候値との違いについて述べよ。
- 2016 年 7 月のアジア・ジェット上の定常ロスビー波の活動について調べ、梅雨明けとの関係について議論せよ。

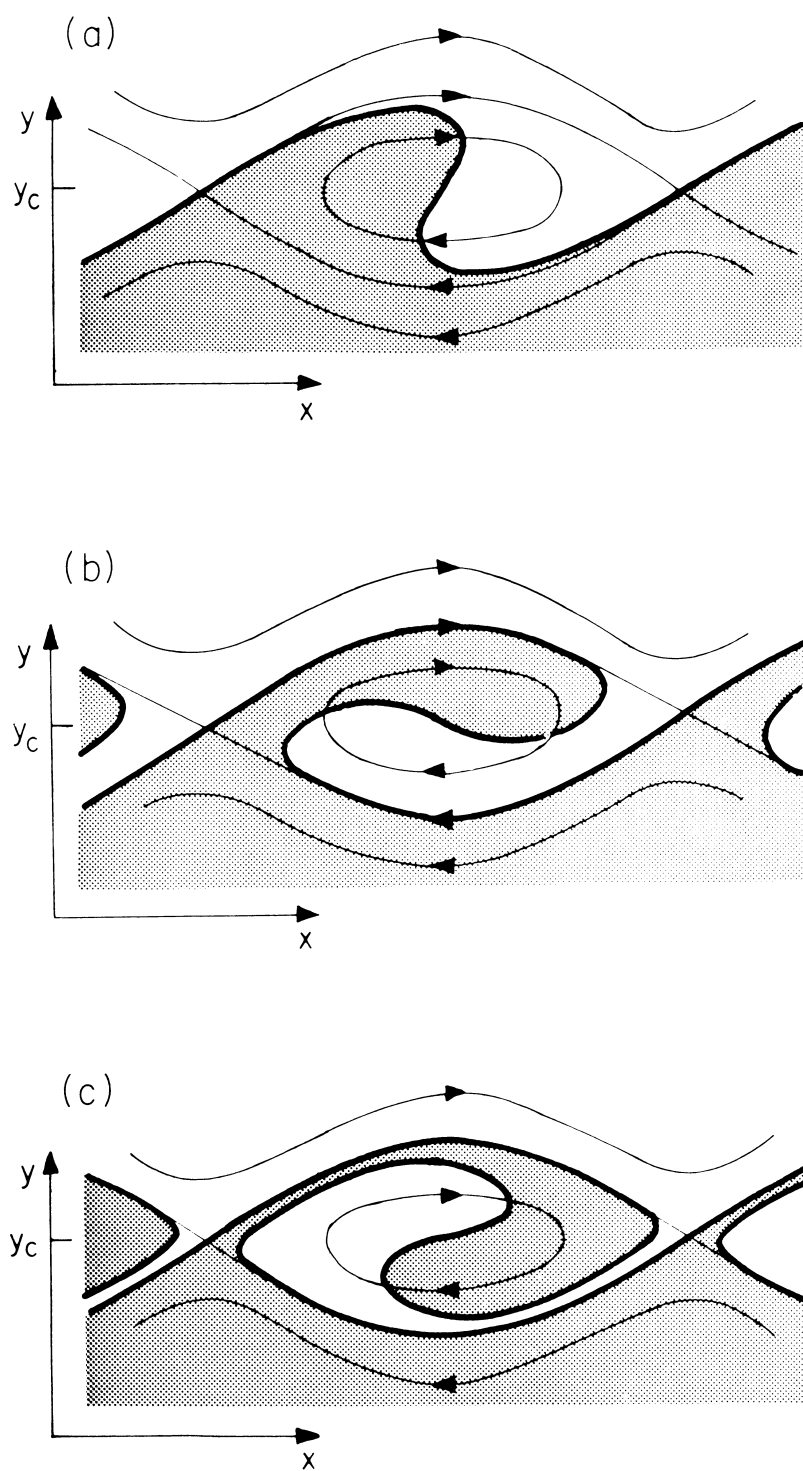


図 5.6 臨界緯度付近での SWW(Stewartson 1978; Warn and Warn 1978) 解の模式図 (Andrews et al. 1987)。

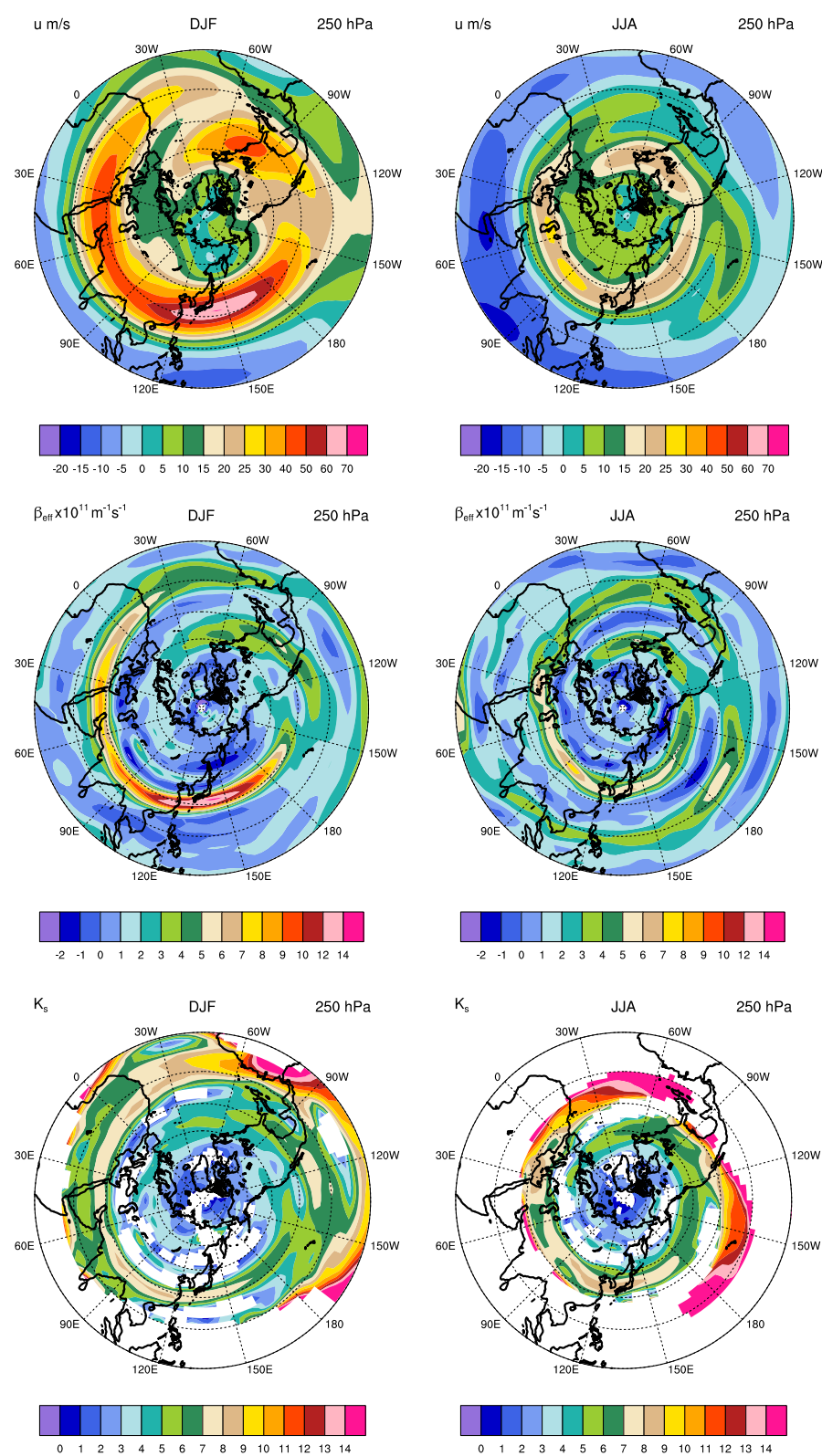


図 5.7 NCEP/NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) 気候値 (1968–1996 年の各季節を平均して作成) から作成した上から東西風, 有効ベータ, 定常ロスビー波波数。左列は 12, 1, 2 月平均, 右列は 6, 7, 8 月平均。

参考文献

- Andrews, D. G., R. Holton, James, and C. B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*. Academic Press, 489 pp.
- Chang, E. K. M., S. Lee, and L. Swanson, Kyle, 2002: Storm track dynamics. *J. Climate*, **15**, 2163–2183, doi:10.1175/1520-0442(2002)015<02163:STD>2.0.CO;2.
- Dima, I. M. and J. M. Wallace, 2003: On the seasonality of the Hadley cell. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 1522–1527.
- Eady, E. T., 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, 33–52, doi:10.1111/j.2153-3490.1949.tb01265.x.
- Hartmann, D. L., 2007: The atmospheric general circulation and its variability. *J. Meteor. Soc. Japan*, **85B**, 123–143, doi:10.2151/jmsj.85B.123.
- Hoskins, B. J. and T. Ambrizzi, 1993: Rossby wave propagation on a realistic longitudinally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1661–1671.
- Hoskins, B. J., I. Draghichi, and H. C. Davies, 1978: A new look at the ω equation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **104**, 31–38, doi:10.1002/qj.49710443903.
- Hoskins, B. J. and M. A. Pedder, 1980: The diagnosis of middle latitude synoptic development. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **106**, 707–719, doi:10.1002/qj.49710645004.
- James, I. N., 1994: *Introduction to circulating atmospheres*. Cambridge Atmosphere and Space Science Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 422 pp.
- Kållberg, P., P. Berrisford, B. Hoskins, A. Simmons, S. Uppala, S. Lamy-Thépaut, and R. Hine, 2005: ERA-40 atlas. Tech. Rep. 19, European Centre for Medium-range Weather Forecasts, 185 pp.
- Kalnay, E., et al., 1996: The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **77**, 437–471.
- Kasahara, A., 1974: Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, **102**, 509–522.
- Kundu, P. K., 1990: *Fluid Mechanics*. Academic Press, 638 pp.
- Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*, 710 pp. 2d ed., Springer-Verlag, New York.
- Sanders, F. and B. J. Hoskins, 1990: An easy method for estimation of Q-vectors from weather maps. *Wea. Forecasting*, **5**, 346–353, doi:10.1175/1520-

- 0434(1990)005;0346:AEMFEO;2.0.CO;2.
- Stewartson, K., 1978: The evolution of the critical layer of a Rossby wave. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **9**, 185–200.
- Tanaka, D., T. Iwasaki, S. Uno, M. Ujiie, and K. Miyazaki, 2004: Eliassen–Palm flux diagnosis based on isentropic representation. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2370–2383, doi:10.1175/1520-0469(2004)061;2370:EFDBOI;2.0.CO;2.
- Uppala, S. M., et al., 2005: The ERA-40 re-analysis. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 2961–3012, doi:10.1256/qj.04.176.
- Warn, T. and H. Warn, 1978: The evolution of a nonlinear Rossby wave critical level. *Stud. Appl. Math.*, **59**, 37–71.