

線型大気の定常応答に対する加速反復解法

北海道大学大学院地球環境科学研究院 渡部雅浩

1 はじめに

大気大循環モデル (AGCM) と同じ球面のプリミティブ方程式系に基づく接線型モデル (linear baroclinic model, 以下 LBM) は、数値予報においては初期摂動の作成に用いられる一方、大規模循環変動の力学過程を調べるのにも非常に有益であることが知られている。その応用範囲は幅広いが、最も単純かつ理解が容易なものとして、ある基本場のもとで外部強制の摂動に対する大気定常応答を求める診断が挙げられる (Hoskins and Karoly 1981 など)。これは、基本場を現実の気候平均場で定義し、大気の摂動を観測される循環場の時間平均 (時間変化項が小さい月平均から季節平均) 偏差と見なすことで、大気長周期変動の生成・維持機構に関する力学的知見を与えてくれる。

理想的な定常ロスビー波の振る舞いならばいざ知らず、観測された長周期偏差の生成・維持過程においては、偏差と気候平均場の定在波の間のエネルギー授受が重要であることは多くの研究から明らかになっている (Branstator 1990; Ting and Sardeshmukh 1993; DeWeaver and Nigam 2000; Peng and Robinson 2001)。実際、AGCM の気候値のまわりで線型化して AGCM から得られる強制項を与えた LBM は、AGCM における大気長周期変動を驚くほどよく再現できるが、その再現性は気候値の帯状平均で基本場を置き換えるとかかなりの部分失われる (Ting and Lau 1993)。定常応答問題を解くには、線型力学演算子逆行列を直接法で計算するのが普通であるが、このとき、基本場が東西一様であるか否かはその実際上の困難さに大きな違いを生じる。前者では、各東西波数成分ごとの小さな行列を解けばよいのに対し、後者では前述の偏差・気候値間の波-波結合があるために、巨大な行列全体を扱う必要がある。従って、ほとんどの研究ではやむを得ず低解像度の LBM を用いるか、時間積分で近似解を求めてきた (Navarra 1990; Branstator 1990; Ting and Lau 1993; Watanabe and Kimoto 2000)。大規模疎行列の反復解法は数多くあるが、ここでは、この問題を解決するための大気モデルに特化した加速反復解法 (以下 AIM と呼ぶ) を提案する。

2 AIM の原理とモデル

AIM の原理は簡単である。力学演算子行列 L を基本場の東西一様成分のみに依存する部分 L_S とそれ以外 L_A に分割する。前者はブロック対角行列なので直接法で逆行列を求めるのは簡単である。そこで、与えられる外部強制 F から仮の解と L_A の積を引いて定義される誤差ベクトルに L_S^{-1} をかけることで、反復的に定常応答を求める。反復スキームは形の上では楕円関数に対するヤコビ緩和法と同じである。但し、解はこのままでは収束条件を満たさないので暴走する。それを抑え、さらに解の収束を加速するために、モデルが含む波数依存の拡散と同じ形の加速演算子行列 R を用いてスキームを修正する。詳細は Watanabe et al. (2005)¹ を参照していただきたいが、AIM を式で表すと以下のようなスキームである。

$$X_a^{n+1} = (R + L_S)^{-1}(R - L_A)X_a^n + (R + L_S)^{-1}F$$

ここで、 X_a^{n+1} は反復 $n+1$ 回目の摂動解を表す。初期推定は $X_a^0 = 0$ である。AIM が収束するかどうか、また十分な効率をもつかどうかは、 R のノルムを定めるパラメータ γ を変えることで調べられる。 γ が小さすぎれば収束条件を満たさず、一方 γ が大きすぎれば収束効率が非常に悪くなる。

まず順圧モデルを用いて AIM の効率を検証し、その後 (現時点で標準的な AGCM の解像度である) T42 鉛直 20 層の LBM へ応用を試みた。

¹JAS へ投稿中, preprint は次のアドレスから取得可能. <http://wwwoa.ees.hokudai.ac.jp/~hiro/sub/pub-j.html>

3 順圧モデルによる検証

観測された 12~2 月の 300hPa 流線関数気候値のまわりで線型化した順圧渦度方程式に、赤道太平洋上に中心をもつ発散強制を与える．解の構造はここでの目的には関係ないが、PNA 的な流線関数の応答が得られる．この応答を AIM で求め、直接法による厳密解と比較する．収束の判定には、

$$\varepsilon^n = \|\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_a^n\| / \|\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_a^1\|$$

と定義される解の 2 乗平均誤差を用いる． \mathbf{X}_a は直接法で求まる真の解である (LBM に適用する際には \mathbf{X}_a は求められないので、 ε の代わりに規格化ノルム差を収束判定に用いる)．T21 の順圧モデルで、 ε を反復回数 n の関数として描いたのが図 1 である．先に述べたとおり、 γ が小さいとき ($\gamma \leq 3$) には解は収束しない一方、 $\gamma \geq 5$ では解の収束が遅くなっていることが分かる．すなわちこの例では $\gamma = 4$ が最適パラメータであるが、このときの AIM の効率を、同じ第一推定 \mathbf{X}_a^1 を用いた時間積分および共役勾配法と比較したのが図 2 である．図から明らかなように、AIM が最も収束が早く、時間積分が最も遅い．10% の誤差で打ち切った場合、時間積分では 380 回の反復 (約 16 日) を要するのに対し、AIM では 9 回で応答が得られる．但し、AIM における加速は R のトレースに敏感なので、あらかじめ最適なパラメータを調べておく必要がある．また、AIM の効率は系内部の拡散に対しても依存性があり、収束は拡散の弱い系では遅く、強い系では早くなる．このことは逆に、拡散プロファイルが同じであれば解像度によらず同じ反復数で応答が得られることを意味する．他の解法では解像度と反復数は比例関係にあるので、これは AIM の大きな利点である．

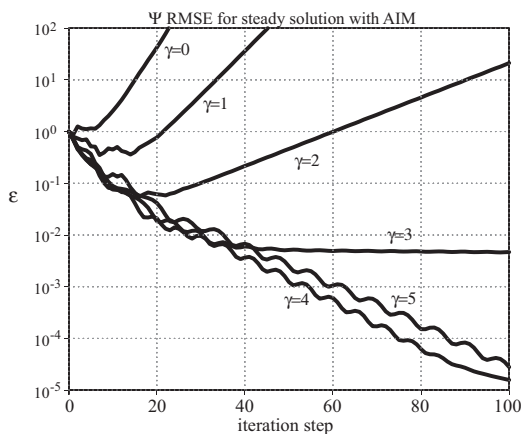


図 1. AIM における規格化 2 乗平均誤差 ε の変化． $\gamma = 1$ から $\gamma = 5$ までの各ケースについて、100 回の反復まで示す．

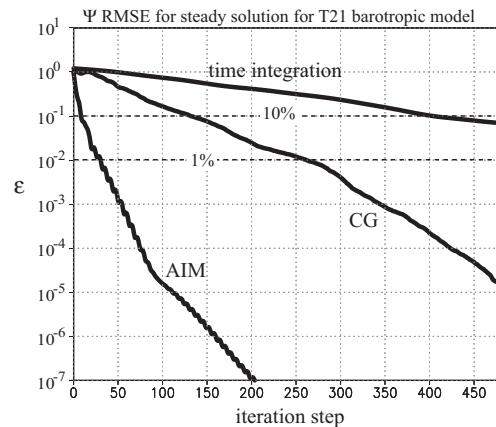


図 2. 反復回数 n に伴う解の規格化 2 乗平均誤差 ε の変化．AIM および、同じ第一推定から反復を始めた他の反復解法 (時間積分と共役勾配法) について示す．

4 LBM への応用

順圧モデルを用いたテストで AIM が十分に効率のよい手法であることが示されたので、LBM で AIM を用いた定常応答計算を行なった．まず、例として 1997/98 年冬季の大気偏差場を選び、ERA40 再解析データの 1961~1990 年冬季 (DJF) の気候値のまわりで LBM を線型化する．同じく ERA40 再解析データから残差法で求めた非断熱加熱と月平均以下のじょう乱による渦度フラッ

クス収束の偏差を強制として定常応答を求めた．観測および定常応答の 850hPa 風偏差と 300hPa 高度場偏差を図 3 に示す．比較のため，東西一様基本場のもとで定常応答を求めた結果もともに載せてある (図 3b)．傾圧不安定を抑えるための強い境界層摩擦のせいで振幅が若干小さいが，上層・下層ともに 3 次元基本場のもとでの偏差分布の再現性はよいことが分かった．そこで，同様の計算を 1960～2002 年の各冬について行い，一種のハインドキャストを試みた．43 年分の応答に対する EOF には，観測データに見られる PNA や NAO によく似た卓越変動が現れ，それらの時係数は ERA40 から得られる同様の時係数との間に有意な相関をもつ (太平洋域で 0.58, 大西洋域で 0.61)．しかし，その再現性は満足のゆくレベルとは言い切れない．これは，基本場や強制を求める際の (特に鉛直方向の) 座標変換に伴う誤差が主な原因であると考えられる．特に，気圧面データでは境界層付近の情報が見失われているので，LBM で用いている σ 面のデータからそれらを作成することが，より正確な診断に重要であろう．

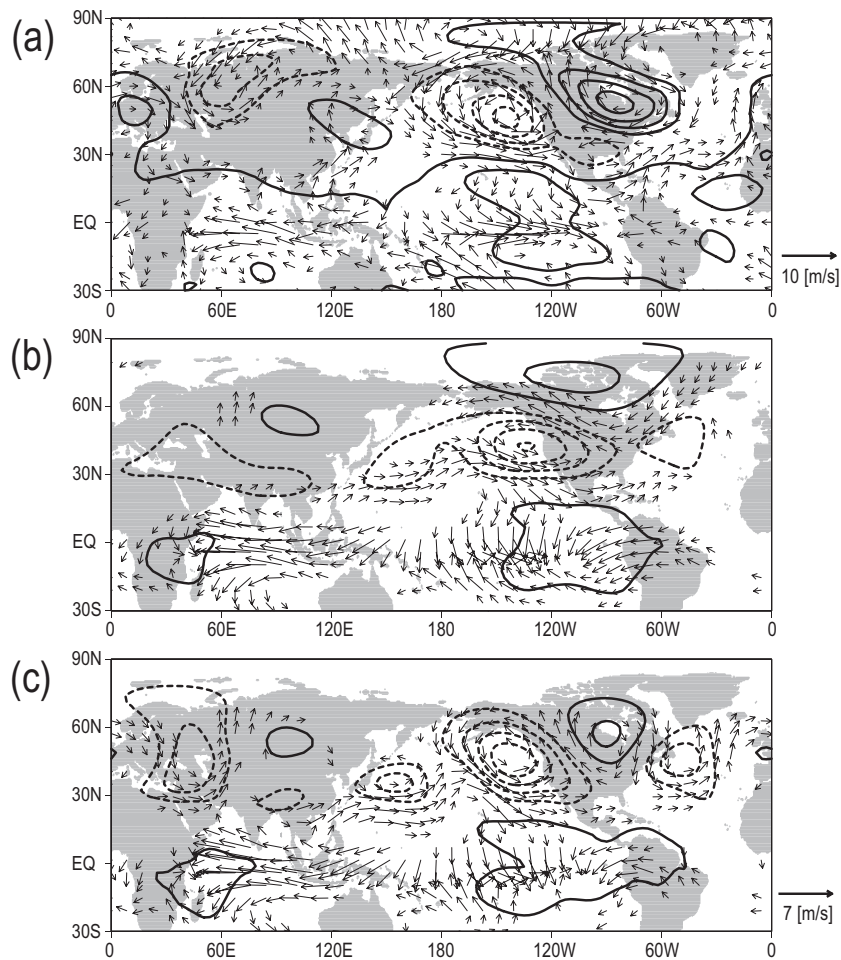


図 3. 1997/98 年冬季 (DJF) の 850hPa 風 (ベクトル) および 300hPa 高度場 (等値線) 偏差．(a) ERA40, (b)-(c), T42L20 LBM に同時期の非断熱加熱および短周期擾乱の強制を与えた定常応答．(b) は東西一様, (c) は 3 次元的な ERA40 気候値のまわりで LBM を線型化したもの．(c) の応答を求める際に AIM を用いた．等値線間隔は (a) が 40m, (b)-(c) が 30m.

5 おわりに

本研究では、T42 程度の解像度で 3 次元基本場のもとでの線型定常応答を解くための新しい反復解法である AIM を提案し、その効率を順圧モデルおよび LBM でテストした。最適なパラメータを見つければ、AIM は既存の反復法に比べ格段に効率がよいことが示された。ただし、時間積分などとは異なり、AIM には東西一様場の演算子行列 L_S の逆行列を (一度だけではあるが) 求める手続きが含まれる。従って、AIM の最適な適用は、同じ基本場のもとでその都度強制が異なる複数の定常応答を求めるような場合であろう。これは、前節で触れたハインドキャストのような計算を指す。例えば σ 面の出力がある AGCM 長期積分における大気長周期変動のハインドキャストを行い、十分な再現性が得られれば、AO/NAO といった卓越変動の強制メカニズムの探求に資することができると考えている。また、AIM を用いればある程度満足できる解像度で LBM を定常アノマリモデルとして使うことができる。これを、例えば浅水モデルや OGCM などの海洋モデルと結合することで、Cane-Zebiak モデルよりも「まし」な intermediate coupled model を構築することが可能である。これについては、現在 IPRC の共同研究者が取り組んでいるところである。

謝辞

本集会参加にあたり、東京大学気候システム研究センターから旅費の援助を受けました。ここに記して感謝いたします。また、主催の労をとっていただいた京大地球物理の余田教授、京大防災研究所の向川助教授、および東大 CCSR の木本教授にお礼申し上げます。本報告で紹介した結果は、フロリダ州立大学気象学科の Prof. F.-F. Jin および Dr. L.-L. Pan との共同研究に基づくものです。

文献

1. Branstator, G., 1990: *J. Atmos. Sci.*, **47**, 629-648.
2. DeWeaver, E. and S. Nigam, 2000: *J. Climate*, **13**, 3893-3914.
3. Hoskins, B. J. and D. J. Karoly, 1981: *J. Atmos. Sci.*, **38**, 1179-1196.
4. Navarra, 1990: *J. Atmos. Sci.*, **47**, 148-169.
5. Peng, S. and W. Robinson, 2001: *J. Climate*, **14**, 2943-2959.
6. Ting, M. and N.-C. Lau, 1993: *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2845-2867.
7. Ting, M. and P. D. Sardeshmukh, 1993: *J. Atmos. Sci.*, **50**, 907-918.
8. Watanabe, M. and M. Kimoto, 2000: *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **126**, 3343-3369; **127**, 733-734.
9. Watanabe, M., F.-F. Jin and L.-L. Pan, 2005: *J. Atmos. Sci.*, submitted.