# 地球惑星科学特別講義 III：対流圏科学

—数値予報特論—

榎本 剛

2015 年 11 月 12 日〜13 日

# 目次

# 講義 1

# はじめに

## 1.1　本講義の構成

この講義では，数値予報に用いられる大気大循環モデルに関わる話題について議論する。まず，数値予報の歴史を振り返り，大気大循環モデルとデータ同化の仕組みについて紹介する。次に，大気の方程式系に含まれる様々な波動について，ノーマルモード解析により調べる。続いて，大気大循環モデルを用いた予報研究の例として，台風進路の予報について紹介する。講義の後半では，中高緯度や低緯度の循環の中から，数値予報の解釈に有用と考えられる基礎的な話題をいくつか取り上げる。

- はじめに: 数値予報の歴史，大気大循環モデル，データ同化
- 方程式系と波動
- 台風進路の予報
- 中高緯度の循環: 傾圧波に伴う鉛直循環，東西平均循環，ロスビー波の伝播
- 低緯度の循環: 熱源に対する大気の応答

## 課題

- 数値予報は今後どのように発展するか。
- 数値予報にスパコンが必要だったのなぜか。
- 数値予報の歴史の中で重要だったことは何か。
- 様々な水平離散化法や格子系の特徴を比較してみよ。
- 数値計算で重要な点は何か。

# 講義 2

# 方程式系と大気波動

ここでは，Arakawa and Konor (2009) に従って，大気中に存在しうる様々な波動について調べる。

## 2.1 音波と重力波

### 2.1.1 基礎方程式系

$f$ 平面上の等温大気（$T = T_0$）に対する次のような基礎方程式系を考える。

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \quad fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{2.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -c_{\mathrm{s}}^2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{2.5}$$

線型化された方程式系（擾乱を表す $'$ は省略）は，次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \quad fv - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\overline{\rho}}\right) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\overline{\rho}}\right) \tag{2.7}$$

$$\delta\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\kappa}{\underline{\underline{H}}}\right)\frac{p}{\overline{\rho}} + g\frac{\theta}{\overline{\theta}} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}}\right) = -\frac{\kappa}{H}w \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{c_{\mathrm{s}}^2}\frac{\partial}{\partial t}\underline{\left(\frac{p}{\overline{\rho}}\right)} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{H}(\underline{\underline{\kappa}} - 1)w\right]\right\} \tag{2.10}$$

準静力学（quasi-hydrostatic，プリミティブ）系では静力学平衡を仮定するので，(2.8) で $\delta = 0$ となる。

非弾性（anelastic）系 (Ogura and Phillips 1962) では，熱力学変数の水平一様成分からのずれが小さいと仮定し，連続の式で密度の局所時間微分を無視する。上の方程式系では，(2.8) 及び (2.10) の下線及び二重下線を無視する。

擬非圧縮（pseudo-incompressible）系 (Durran 1989) は，連続の式における気圧の局所時間微分を無視するので，(2.10) の下線を無視する。

統一（unified）系 (Arakawa and Konor 2009) では，連続の式の密度を静力学の密度に置き換える。気圧を静力学成分とそれからのずれに分ける。

$$p = p_{\mathrm{qs}} + p' \tag{2.11}$$

以下 $p_{\mathrm{qs}}$ は単に $p$ と書く。

簡単のため $y$ 方向に一様であるとし，

$$b \equiv g\frac{\theta}{\overline{\theta}} \tag{2.12}$$

$$N^2 \equiv g\frac{\mathrm{d}\ln\overline{\theta}}{\mathrm{d}z} \tag{2.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln\overline{\theta}}{\mathrm{d}z} = \frac{\kappa}{H} \tag{2.14}$$

を用いると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f^2 u - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(\frac{p}{\overline{\rho}} + \frac{p'}{\overline{\rho}}\right) \tag{2.15}$$

$$\delta\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\kappa}{\underline{\underline{H}}}\right)\left(\frac{p'}{\overline{\rho}}\right) \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -N^2 w \tag{2.17}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\kappa}{\underline{\underline{H}}}\right)\left(\frac{p}{\overline{\rho}}\right) = b \tag{2.18}$$

$$\frac{1}{c_{\mathrm{s}}^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\frac{p}{\overline{\rho}} + \varepsilon\frac{p'}{\overline{\rho}}}\right) = -\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{H}(\underline{\underline{\kappa}} - 1)\right]w\right\} \tag{2.19}$$

が得られる。

統一系では，(2.10) において $\epsilon = 0$ とする。

表 2.1 に方程式系を切り替える「スイッチ」をまとめる。

| | $\varepsilon$ | $\delta$ | 下線 |
|---|---|---|---|
| 完全圧縮系 | 1 | 1 | 残す |
| 統一系 | 0 | 1 | 残す |
| 擬非圧縮系 | N/A | 1 | 下線を無視 |
| 非弾性系 | N/A | 1 | 下線及び二重下線を無視 |
| 準静力学系 | 1 | 0 | 残す |

表 2.1　方程式系と $\varepsilon$, $\delta$, 下線，二重下線の関係

### 2.1.2　波動解

波動解を仮定する。

$$\boldsymbol{v} = (u, w, b, \frac{p}{\overline{\rho}}, \frac{p'}{\overline{\rho}})^{\mathrm{T}} \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{u} = (U, W, B, P, Q)^{\mathrm{T}} \tag{2.21}$$

$$\sqrt{\overline{\rho}}\boldsymbol{v} = \Re[\boldsymbol{u}\exp(kx + mz - \omega t)] \tag{2.22}$$

式 (2.15)–(2.19) は行列 $M$ を用いて表すことができる。

$$M\boldsymbol{u} = 0 \tag{2.23}$$

$$(f^2 - \omega^2)U - k\omega(P + Q) = 0 \tag{2.24}$$

$$\delta\omega W + (-m + i\mu)Q = 0 \tag{2.25}$$

$$\omega B + iN^2 W = 0 \tag{2.26}$$

$$-iB + (-m + i\mu)P = 0 \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{c_{\mathrm{s}}^2}\omega(\underline{P + \varepsilon Q}) = 0 \tag{2.28}$$

ここで

$$\mu \equiv \left(\frac{1}{2} - \underline{\underline{\kappa}}\right)\frac{1}{H} \tag{2.29}$$

$$\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\overline{\rho}RT_0}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z} = -\frac{1}{H} \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = im - \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z} = \left(im + \frac{1}{2H}\right) \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\kappa}{H} = im + \left(\frac{1}{2} - \kappa\right)\frac{1}{H} = im + \mu \tag{2.32}$$

$$\tag{2.33}$$

$$
M = \begin{pmatrix}
f^2-\omega^2 & 0 & 0 & k\omega & k\omega \\
0 & \delta\omega & 0 & 0 & -m+i\mu \\
0 & iN^2 & \omega & 0 & 0 \\
-k & -m-i\mu & 0 & \dfrac{\omega}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}} & \varepsilon\dfrac{\omega}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}} \\
0 & 0 & -i & -m+i\mu & 0
\end{pmatrix} \tag{2.34}
$$

### 2.1.3 順圧モード

$b=0$ とすると，(2.34) は縮退し，その行列式は次のようになる。

$$
\det M = \begin{vmatrix} f^2-\omega^2 & k\omega \\ -k & \dfrac{\omega}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}} \end{vmatrix} \tag{2.35}
$$

$$
= \frac{\omega}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}}(f^2-\omega^2) + k^2\omega = 0 \tag{2.36}
$$

各方程式系の分散関係式は次のようになる。

**非弾性系，擬非圧縮系**　自明な解のみ。

$$
\omega = 0 \tag{2.37}
$$

**完全圧縮系，統一系，準静力学系**　コリオリ力で変形された Lamb 波。

$$
\omega^2 = f^2 + k^2 c_{\mathrm{s}}^2 \tag{2.38}
$$

### 2.1.4 傾圧モード

$\det M = 0$ より次の式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\underline{\varepsilon\delta\omega^4} - c_{\mathrm{s}}^2\left(\delta k^2 + m^2 + \mu^2 + \frac{N^2+\varepsilon\delta f^2}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}}\right)\omega^2 \\
&\quad + c_{\mathrm{s}}^2\left[f^2\left(m^2+\mu^2+\frac{N^2}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}}\right) + k^2N^2\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

$\omega^2$ の 2 次方程式 (2.39) を解くと分散関係式を得る。

$$
\begin{aligned}
\omega^2 =& \frac{c_{\mathrm{s}}^2}{2}\left(\delta k^2 + m^2 + \mu^2 + \frac{N^2+\varepsilon\delta f^2}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}}\right) \\
&\pm \frac{c_{\mathrm{s}}^2}{2}\left\{\left(\delta k^2 + m^2 + \mu^2 + \frac{N^2+\varepsilon\delta f^2}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}}\right)^2\right. \\
&\left. -4\left[f^2\left(m^2+\mu^2+\frac{N^2}{\underline{c_{\mathrm{s}}^2}}\right) + k^2N^2\right]\right\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

正の根は音波を表す。

$$\omega^2 = c_\mathrm{s}^2 \left( k^2 + m^2 + \mu^2 + \underline{\frac{N^2 + \varepsilon\delta f^2}{c_\mathrm{s}^2}} \right),\ \delta = \varepsilon = 1 \tag{2.41}$$

負の根は重力波を表す。

$$\omega^2 = \frac{f^2 \left( m^2 + \mu^2 + \underline{\frac{N^2}{c_\mathrm{s}^2}} \right) + k^2 N^2}{\delta k^2 + m^2 + \mu^2 + \underline{\frac{N^2 + \varepsilon\delta f^2}{c_\mathrm{s}^2}}} \tag{2.42}$$

各方程式系に対する分散関係式は次のようになる。

**完全圧縮系**　$\varepsilon = \delta = 1$ とし，下線の項は残す。

$$\omega^4 - c_\mathrm{s}^2 \left( k^2 + m^2 + \mu^2 + \frac{N^2 + f^2}{c_\mathrm{s}^2} \right) \omega^2 + c_\mathrm{s}^2 \left[ f^2 \left( m^2 + \mu^2 + \frac{N^2}{c_\mathrm{s}^2} \right) + k^2 N^2 \right] = 0 \tag{2.43}$$

**統一系**　$\varepsilon = 0, \delta = 1$ とし，下線の項は残す。

$$\omega^2 = \frac{f^2 \left( m^2 + \mu^2 + \frac{N^2}{c_\mathrm{s}^2} \right) + k^2 N^2}{k^2 + m^2 + \mu^2 + \frac{N^2 + f^2}{c_\mathrm{s}^2}} \tag{2.44}$$

**擬非圧縮系**　$\delta = 1$ とし，下線の項を省略する。

$$\omega^2 = \frac{f^2 \left( m^2 + \mu^2 \right) + k^2 N^2}{k^2 + m^2 + \mu^2} \tag{2.45}$$

**非弾性系**　$\delta = 1$ とし，下線及び二重下線の項を省略する。$\mu = 1/2H$ となる。

$$\omega^2 = \frac{f^2 \left( m^2 + \frac{1}{4H^2} \right) + k^2 N^2}{k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2}} \tag{2.46}$$

**準静力学系**　$\delta = 0$ とし，下線の項は保持する。

$$\omega^2 = \frac{f^2 \left( m^2 + \mu^2 + N^2/c_\mathrm{s}^2 \right) + k^2 N^2}{m^2 + \mu^2 + \frac{N^2 + f^2}{c_\mathrm{s}^2}} \tag{2.47}$$

### 2.1.5　分散関係の図示

分散関係式において，パラメタ $L_x, n, H, D, \gamma, g$ に具体的な値を与える。

$$H = 10\,\mathrm{km},\ D = 100\,\mathrm{km},\ g = 9.8\,\mathrm{m/s} \tag{2.48}$$

$$L_x = \frac{2\pi}{k}\ \mathrm{m} \tag{2.49}$$

$$m = \frac{\pi n}{D},\ n = 1, 5, 10, 20, 40, 80, 160 \tag{2.50}$$

$$c_\mathrm{s}^2 = \gamma R T_0 = \gamma g H = (370\,\mathrm{m/s})^2 \tag{2.51}$$

$$\mu = \left(\frac{1}{2} - \underline{\underline{\kappa}}\right)\frac{1}{H} \tag{2.52}$$

$$\kappa = \frac{R}{c_p} = 1 - \frac{1}{\gamma},\ \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} \tag{2.53}$$

$$N^2 = g\frac{\mathrm{d}\ln\overline{\theta}}{\mathrm{d}z} = \frac{g\kappa}{H} = 2.8\times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{2.54}$$

これらを用いて求めた分散関係を図 2.1 に示す。

## 2.2　準地衡風方程式系

この節では，$\beta$ 平面上の準地衡風方程式系で静力学平衡を仮定して，ロスビー波の分散関係式を導出する。

### 2.2.1　基礎方程式系

$$f_0\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{p}{\overline{\rho}} \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{v}{x} = \beta v - f_0\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.56}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\kappa}{H}\right)\frac{p}{\overline{\rho}} = \frac{\theta}{\overline{\theta}}g \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\theta}{\overline{\theta}} = -\frac{\kappa}{H}w \tag{2.58}$$

$$\frac{1}{c_\mathrm{s}^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\overline{\rho}} = -\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{H}(\kappa - 1)\right]w\right\} \tag{2.59}$$

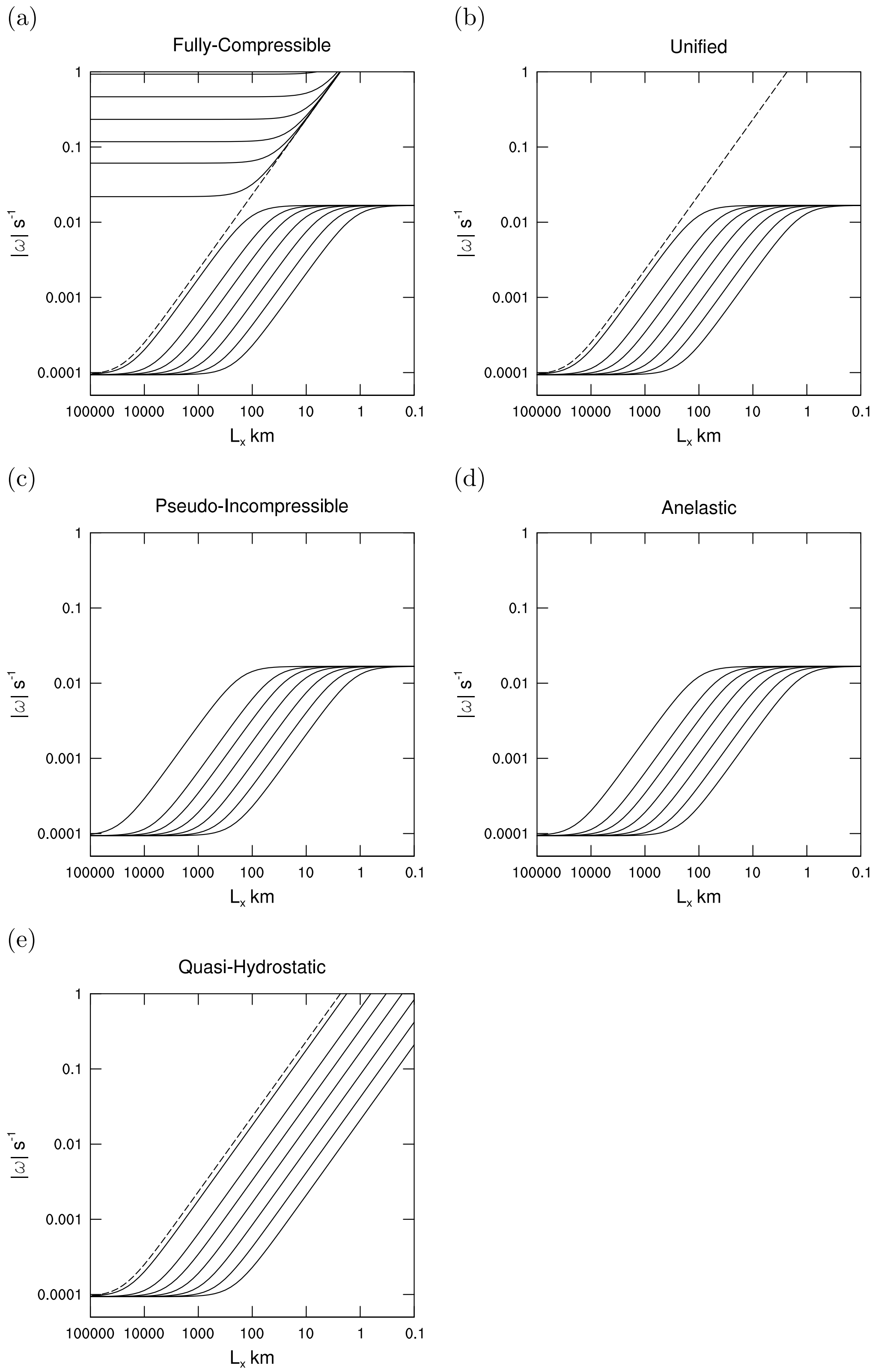



図 2.1　$f$ 平面上の分散関係式。(a) 完全圧縮系，(b) 統一系，(c) 擬非圧縮系，(d) 非弾性系, (e) 準静力学系。破線は Lamb 波，左上は音波，右下は重力波の分散関係。

### 2.2.2　波動解

波動解を仮定する。

$$\boldsymbol{v} = (u, v, w, \frac{p}{\overline{\rho}})^{\mathrm{T}} \tag{2.60}$$

$$\boldsymbol{u} = (U, V, W, P)^{\mathrm{T}} \tag{2.61}$$

$$\sqrt{\overline{\rho}}\boldsymbol{v} = \Re[\boldsymbol{u}\exp(kx + mz - \omega t)] \tag{2.62}$$

(2.59)–(2.59) に代入すると，次を得る。

$$ikf_0 V + k^2 P = 0 \tag{2.63}$$

$$ikf_0 U + (\beta + k\omega)V = 0 \tag{2.64}$$

$$kU + (m + i\mu)W - \frac{1}{c_{\mathrm{s}}^2}\omega P = 0 \tag{2.65}$$

$$\frac{\kappa g}{H}W + \omega(m - i\mu)P = 0 \tag{2.66}$$

### 2.2.3　順圧モード

完全圧縮系，統一系，準静力学系では，順圧ロスビー波の分散関係式は次の式で与えられる。

$$\omega = -\frac{k\beta}{k^2 + \underline{\left(\frac{f_0}{c_{\mathrm{s}}}\right)^2}} \tag{2.67}$$

波数 $k \to 0$ のとき $\omega \to 0$ である。

擬非圧縮系及び非弾性系では，下線の項が無いので，

$$\omega = -\frac{\beta}{k} \tag{2.68}$$

となる。波数 $k \to 0$ のとき $\omega \to -\infty$ となる。

### 2.2.4　傾圧モード

傾圧ロスビー波の分散関係式は，次のようになる。

$$\omega = -\frac{k\beta}{k^2 + f_0^2\left[\underline{\frac{1}{c_{\mathrm{s}}^2}} + \frac{H}{\kappa g}(m^2 + \mu^2)\right]} \tag{2.69}$$

モデルの上端の高さ $D$ がスケールハイト $H$ 程度であれば，分母の括弧内の第 2 項が支配的で，$D$ が $H$ の 10 倍でも無視できないので，順圧ロスビー波に比べて擬非圧縮系や非弾性系による変形は小さい。

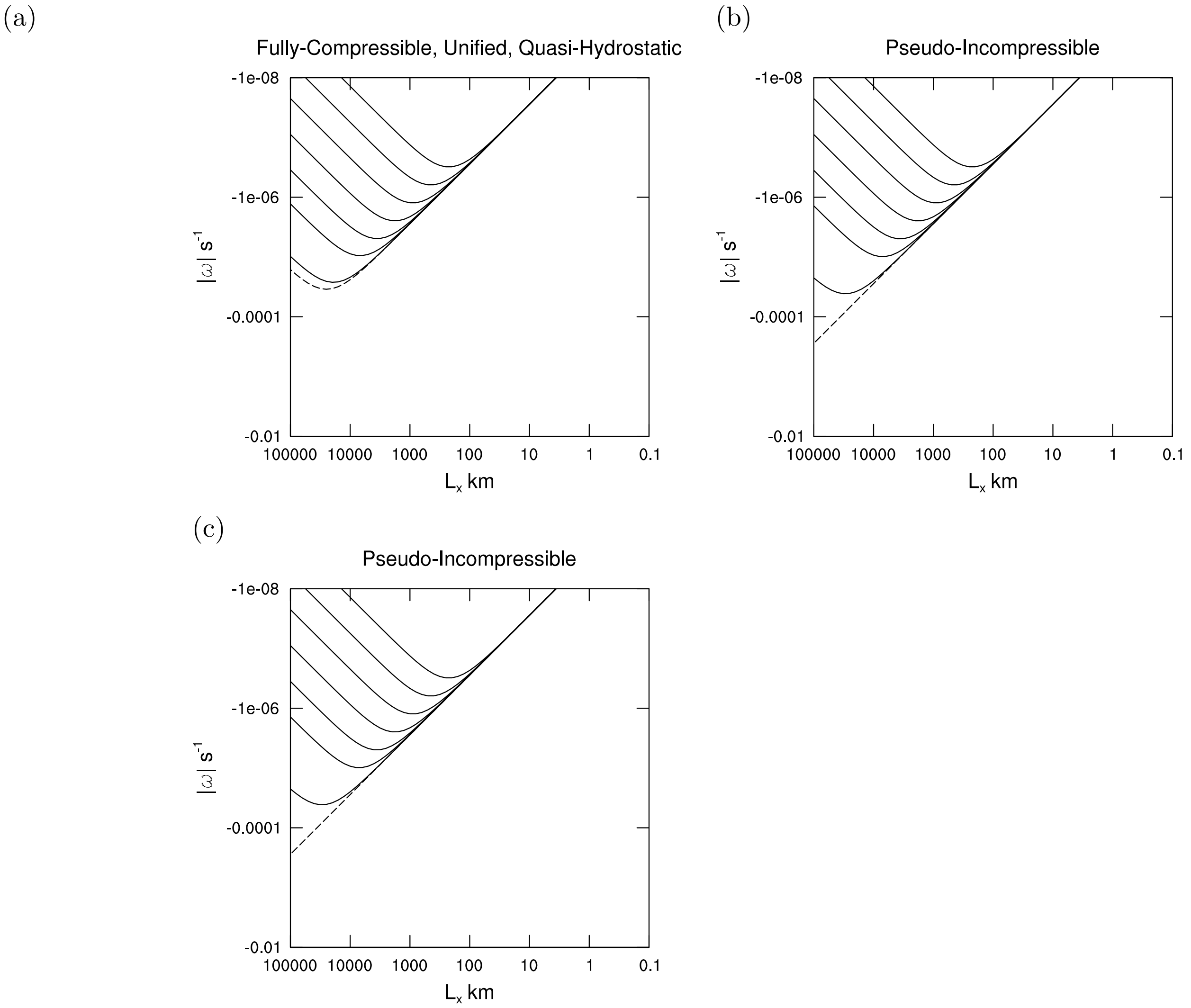



図 2.2　準地衡風方程式系に対する分散関係式。(a) 完全圧縮系，統一系，準静力学系，(b) 擬非圧縮系，(c) 非弾性系。破線は順圧，実線は傾圧ロスビー波の分散関係。

### 2.2.5　分散関係の図示

第 2.1.5 節と同じパラメタを用いて求めた分散関係を図 2.2 に示す。

## 2.3　まとめ

- 統一系は音波を取り除くが，Lamb 波，重力波，ロスビー波を変形しない。
- 擬非圧縮系は深い重力波を少し変形し，準静力学系はこれを大きく変形する。
- 擬非圧縮系と非弾性系は，波長の長いロスビー波を変形する。

## 課題

- 高解像度モデルでは，準静力学系はどのくらいの水平解像度まで用いることができるか。
- 擬非圧縮系や非弾性系を全球モデルに用いるとどのような誤差が生じるか。
- 音波を取り扱うためには，音波を取り除く方法以外にどのようなものがあるか。
- (2.69) を導出せよ。

# 講義 3

# 中高緯度の循環

この講義では，準地衡風方程式系における鉛直循環について学ぶ。高度よりも気圧に基づく鉛直座標が便利なので，方程式系を座標変換する。

## 3.1　様々な鉛直座標

鉛直座標は，物理的な高さ $z$ に限らない。$z$ と 1 対 1 に対応する様々な変数を鉛直座標として用いることができる。まず，合成函数の偏微分の復習から始める。

### 3.1.1　合成函数の偏微分

$f = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ がいずれも $u$, $v$ に関して偏微分可能であれば，合成函数 $f = f((\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は，$u$, $v$ に関して偏微分可能で，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_v = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_v + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_v, \tag{3.1}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_u = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_u \tag{3.2}$$

と書ける。今，$x = u$, $v = s$ 即ち $y = z(x, s)$ の場合を考えると，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_s = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_z + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_u \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_s, \tag{3.3}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_u = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_u \left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_u \tag{3.4}$$

となる。

### 3.1.2　一般化鉛直座標

Kasahara (1974) に基づいて，一般化された鉛直座標を導入する。(3.4) を用いて，(3.3) を書き換

えると，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_s = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_z + \left.\frac{\partial s}{\partial z}\right|_u \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_s \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_u \tag{3.5}$$

と書ける。$u$ を水平座標 $x, y$ や時刻 $t$ と見なすと，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z + \frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s \frac{\partial f}{\partial s}, \tag{3.6}$$

$$\nabla_s f = \nabla_z f + \frac{\partial s}{\partial z}\nabla_s z \frac{\partial f}{\partial s} \tag{3.7}$$

と書ける。これらを使うと $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_s + \dot{s}\frac{\partial}{\partial s} \tag{3.8}$$

と表すことができる。ここで，

$$\dot{s} \equiv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial s}{\partial z}\left[w - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s - \boldsymbol{v}\cdot\nabla_s z\right] \tag{3.9}$$

である。$s$ は，一般化された鉛直座標，$\dot{s}$ は一般化された鉛直速度である。

$s$ 座標で静力学平衡は

$$g\frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{3.10}$$

となる。(3.7), (3.8), (3.10) を用いると，摩擦がないときの水平の運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla_s p - g\nabla_s z \tag{3.11}$$

と書ける。また，連続の式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + \nabla_s\cdot\left(\boldsymbol{v}\frac{\partial p}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\dot{s}\frac{\partial p}{\partial s}\right) = 0 \tag{3.12}$$

と変形される。熱力学の式は全微分で表されるので，形は変わらない。ただし，全微分は (3.8) で表される。

## 3.2 気圧座標

### 3.2.1 基礎方程式系

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} = -g\nabla z \tag{3.13}$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla + \omega\frac{\partial}{\partial p},\ \omega \equiv \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{3.14}$$

静力学平衡

$$g\frac{\partial z}{\partial p} = -\alpha,\ \alpha \equiv \frac{1}{\rho} \tag{3.15}$$

連続の式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{3.16}$$

熱力学の式

$$\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \tag{3.17}$$

### 3.2.2 準地衡風方程式系

$\beta$ 平面近似

$$f = f_0 + \beta y,\ \beta \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \tag{3.18}$$

地衡風

$$u_{\mathrm{g}} = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial y},\ v_{\mathrm{g}} = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{3.19}$$

ラグランジュ微分とオイラー微分との関係

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{\mathrm{g}}\frac{\partial}{\partial x} + v_{\mathrm{g}}\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.20}$$

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d_g}u_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} = f_0 v_{\mathrm{a}} + \beta y v_{\mathrm{g}} \tag{3.21}$$

$$\frac{\mathrm{d_g}v_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} = -f_0 u_{\mathrm{a}} - \beta y u_{\mathrm{g}} \tag{3.22}$$

静力学平衡

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \tag{3.23}$$

連続の式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}} = 0 \tag{3.24}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{3.25}$$

熱力学の式

$$\frac{\mathrm{d_g}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}p} = \frac{\theta_0}{c_p T_0}\dot{Q} \tag{3.26}$$

ここで $\theta$ は，基本場 $\theta_0(p)$ からのずれで，偏差を示す $'$ は省略する。

$$\theta_{\mathrm{total}}(x,y,p,t) = \theta_0(p) + \theta(x,y,p,t) \tag{3.27}$$

熱力学の式は気温 $T$ を使って

$$\frac{\mathrm{d_g}T}{\mathrm{d}t} - \frac{p}{R}S_0\omega = \frac{\dot{Q}}{c_p} \tag{3.28}$$

と表すこともできる。ここで

$$S_0 \equiv -\frac{\alpha_0}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}p} \tag{3.29}$$

は，基本場の安定度を示す。

## 3.3 $Q$ ベクトル

準地衡風方程式系における鉛直循環を診断する $\omega$ 方程式を導出する。以下のように温度風平衡から導出すると，鉛直流 $\omega$ を駆動する強制項を簡潔に表現することができる。

### 3.3.1 $Q$ ベクトルの導出

簡単のため，$f$ 平面 $(f = f_0)$ 上で断熱（非断熱加熱 $\dot{Q} = 0$）の場合を考える。このとき運動方程式 (3.21), (3.22) は

$$\frac{\mathrm{d_g}u_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} = f_0 v_\mathrm{a},\ \frac{\mathrm{d_g}v_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} = -f_0 u_\mathrm{a} \tag{3.30}$$

となる。(3.19) の右辺を $p$ で微分し，静力学平衡 (3.23) を用いると温度風平衡

$$f_0\frac{\partial u_\mathrm{g}}{\partial p} = \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{3.31}$$

$$f_0\frac{\partial v_\mathrm{g}}{\partial p} = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.32}$$

が得られる。(3.31) の右辺のラグランジュ微分 $(\mathrm{d}_g/\mathrm{d}_t)$ をとると

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = S_0\frac{\partial \omega}{\partial y} + Q_y \tag{3.33}$$

となる。ここで，

$$Q_y \equiv -\frac{R}{p}\frac{\partial \boldsymbol{v}_\mathrm{g}}{\partial y}\cdot\nabla T \tag{3.34}$$

である。(3.31) の左辺をラグランジュ微分し，(3.31), (3.32) を用いると

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(f_0\frac{\partial u_\mathrm{g}}{\partial p}\right) = f_0^2\frac{\partial v_\mathrm{a}}{\partial p} - Q_y \tag{3.35}$$

となる。(3.33)，(3.35) より，

$$S_0\frac{\partial \omega}{\partial y} - f_0^2\frac{\partial v_\mathrm{a}}{\partial p} = -2Q_y \tag{3.36}$$

が得られる。同様に (3.31) のラグランジュ微分から，

$$S_0\frac{\partial \omega}{\partial x} - f_0^2\frac{\partial u_\mathrm{a}}{\partial p} = -2Q_x \tag{3.37}$$

$$Q_x \equiv -\frac{R}{p}\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}}{\partial x}\cdot\nabla T \tag{3.38}$$

を得る。(3.36) を $y$，(3.37) を $x$ で微分して加え, 連続の式 (3.25) を用いると $\omega$ に関する診断の式

$$\left(S_0\nabla^2 + f_0^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega = -2\nabla\cdot\boldsymbol{Q} \tag{3.39}$$

を得る。ここで $\boldsymbol{Q} \equiv (Q_x, Q_y)$ は $\boldsymbol{Q}$ ベクトルと呼ばれる (Hoskins et al. 1978)。

### 3.3.2 非地衡風成分の役割

準地衡風方程式系における非地衡風成分の役割について考えよう。非地衡風成分がないとき, (3.33) は地衡風成分のみで強制された気温傾度の時間変化

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = Q_y \tag{3.40}$$

(3.35) は鉛直シアの変化

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(f_0\frac{\partial u_{\mathrm{g}}}{\partial p}\right) = -Q_y \tag{3.41}$$

を表す。これらは大きさが同じで符号が反対なので，温度風平衡を壊すように働いている。つまり，温度風平衡は非地衡風成分による鉛直循環により維持されている。

### 3.3.3 $\boldsymbol{Q}$ ベクトルの見方

高度場や気温の分布が与えられたときに，$\boldsymbol{Q}$ ベクトルがどのようになるか理解するため，簡単な場合について考えてみよう (Sanders and Hoskins 1990)。(3.34) 及び (3.38) で等温線と平行に $x$ 軸をとると $\partial T/\partial x = 0$ となるので

$$\boldsymbol{Q} = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\partial v_{\mathrm{g}}}{\partial x}, -\frac{\partial u_{\mathrm{g}}}{\partial x}\right) = -\frac{R}{p}\left|\frac{\partial T}{\partial y}\right|\left(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}}{\partial x}\right) \tag{3.42}$$

と変形することができる。すなわち，$\boldsymbol{Q}$ は左手が寒気となるようにとった $x$ 軸方向に沿う地衡風ベクトルの変化（$\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}/\partial x$）を 90° 時計回りに回転（$-\boldsymbol{k}\times$）したものに比例（$R/p\,|\partial T/\partial y|$）する。

$\boldsymbol{Q}$ ベクトルの性質をまとめると以下の通りである。

- $\boldsymbol{Q}$ ベクトルは，収束域で上昇流，発散域で下降流を強制する (3.39)。
- $\boldsymbol{Q}$ ベクトルは，北風から南風に変わる低気圧の中心では東向き（温度風の向き），南から北風に変わる高気圧の中心では西向き（温度風と反対向き）となり，低気圧の前面で上昇流，後面で下降流を強制する。（図 3.1a）
- 等温線と等高線が平行で温度移流のない場合でも，風向きが北西から南西に変わる谷（トラフ）で $\boldsymbol{Q}$ ベクトルは東向きとなり，低気圧の前面に上昇流を強制する（図 3.1b）。
- 北風と南風とが合流する前線形成場では，東ほど風が強くなるため，$\boldsymbol{Q}$ ベクトルは南向きとなり，前線の南の温暖域で上昇流を強制する（図 3.2）。

(a) (b)

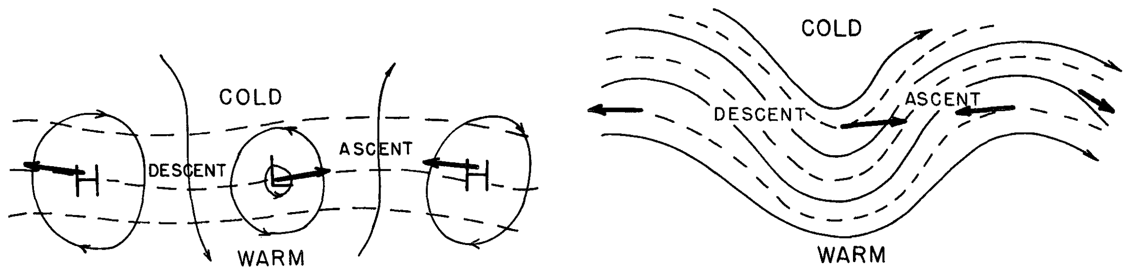



図 3.1　(a) 地表付近の高低気圧の列，(b) 上空の峰や谷の列に伴う $\boldsymbol{Q}$ ベクトル（太矢印）。破線は等温線，実線は等圧線または等高線を表す。Sanders and Hoskins (1990)

- 暖気に向いた $\boldsymbol{Q}$ ベクトルは前線形成，等温線と平行な $\boldsymbol{Q}$ ベクトルは不活発，寒気に向いた $\boldsymbol{Q}$ ベクトルは前線消滅を示す（図 3.3, 3.4）。

### 3.3.4　実際の例

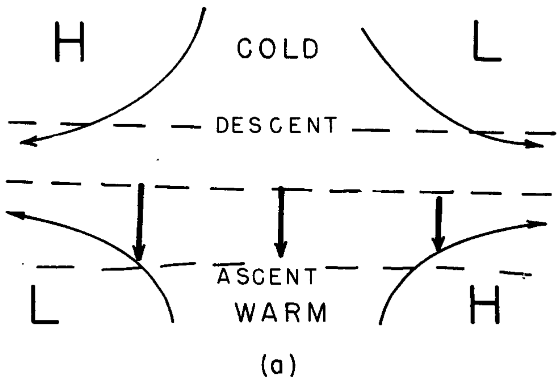
1975 年 11 月 10 日 0 UTC，北米東岸の低気圧 (Hoskins and Pedder 1980) の例を図 3.5 に示す。700 hPa 面の谷の後面（西側）に寒気がある（図 3.5a）。これに対応して，下降流とこれに対応する $\boldsymbol{Q}$ ベクトルの発散が見られる（図 3.5b, c）。低気圧の前面では，$\boldsymbol{Q}$ ベクトルが収束している。これよりも弱いが，寒冷前線でも $\boldsymbol{Q}$ ベクトルが見られる。等温線を横切っているので，前線形成が示唆される。一方，温暖前線では $\boldsymbol{Q}$ ベクトルは等温線に平行であり重要でないことが分る。

2008 年 3 月 31 日から 4 月 1 日にかけて，低気圧が日本の東の海上で急発達した（図 3.6）。3 月 31 日に 700 hPa の谷は日本列島付近にあり，西日本に寒気が流入していた（図 3.7a）。これに対応する下降流と $\boldsymbol{Q}$ ベクトルの発散が黄海から九州付近で顕著である（図 3.7b, c）。谷に伴う $\boldsymbol{Q}$ ベクトルの値は大きいが等温線と平行であり，重要ではない。日本の東岸に沿う寒冷前線及び東シナ海では，$\boldsymbol{Q}$ は等温線を横切っており，前線形成が示唆される。実際に日本の東の海上で低気圧が発達し寒冷前線が強化されるとともに，東シナ海で前線形成が見られる（図 3.6b）。

## 課題

- (3.21), (3.22) から絶対渦度方程式を作れ。
- (3.23) を用いて (3.28) を $\partial\phi/\partial p$ で表せ。
- 絶対渦度方程式と $\partial\phi/\partial p$ で表した熱力学の式から時間微分の項を消去して，$\omega$ 方程式を導き，(3.39) と比較せよ。

- 低気圧の事例を選んで $\boldsymbol{Q}$ ベクトルを描け。領域はどこでもよい。高度を変えるとどうなるか。
- `http://www.dpac.dpri.kyoto-u.ac.jp/enomoto/lectures/midlat/qvector.tar.bz2`



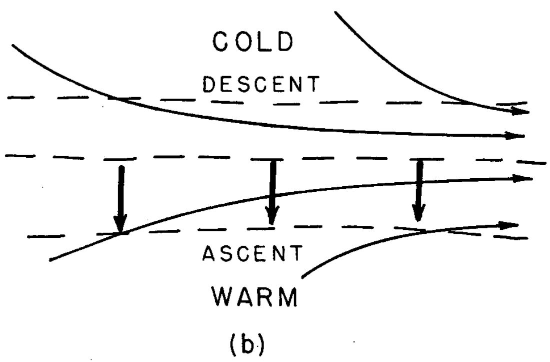




図 3.2　合流（confluent）場における前線形成 (a) 地表付近の気圧配置及び (b) 上空のジェットの入口付近の高度分布に伴う $\boldsymbol{Q}$ ベクトル（太矢印）。破線は等温線，実線は等圧線または等高線を表す。Sanders and Hoskins (1990)

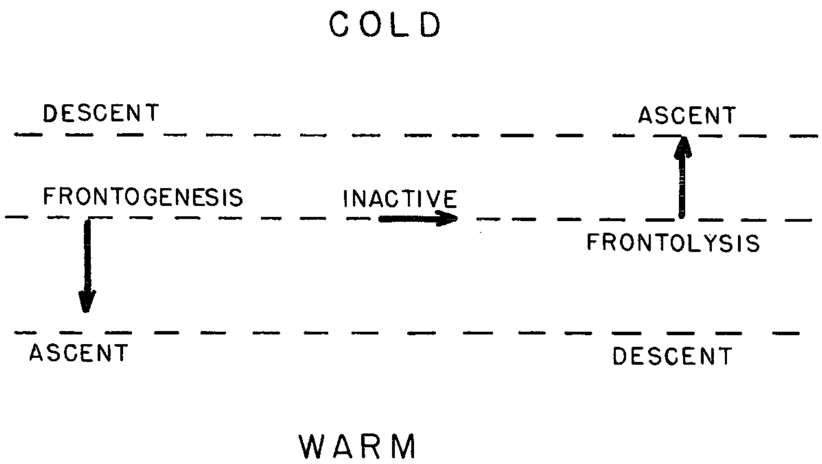



図 3.3　前線形成，不活発，及び前線消滅を示す $\boldsymbol{Q}$ ベクトル（太矢印）。破線は等温線を示す。Sanders and Hoskins (1990)

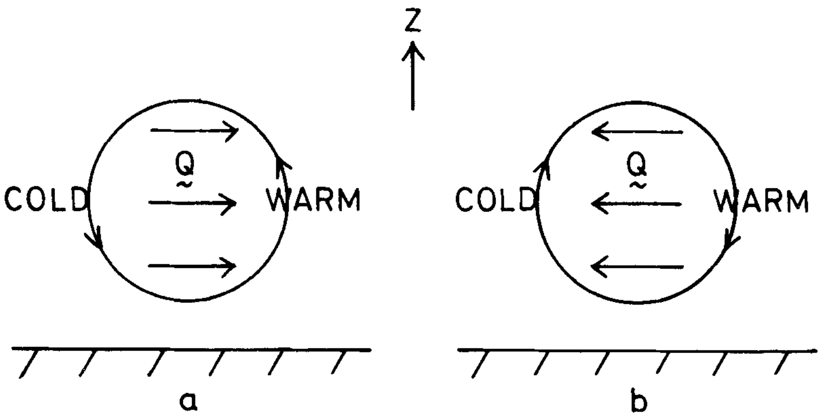



図 3.4　(a) 前線形成及び (b) 前線消滅時における $\boldsymbol{Q}$ ベクトル（太矢印）と鉛直循環。Hoskins and Pedder (1980)

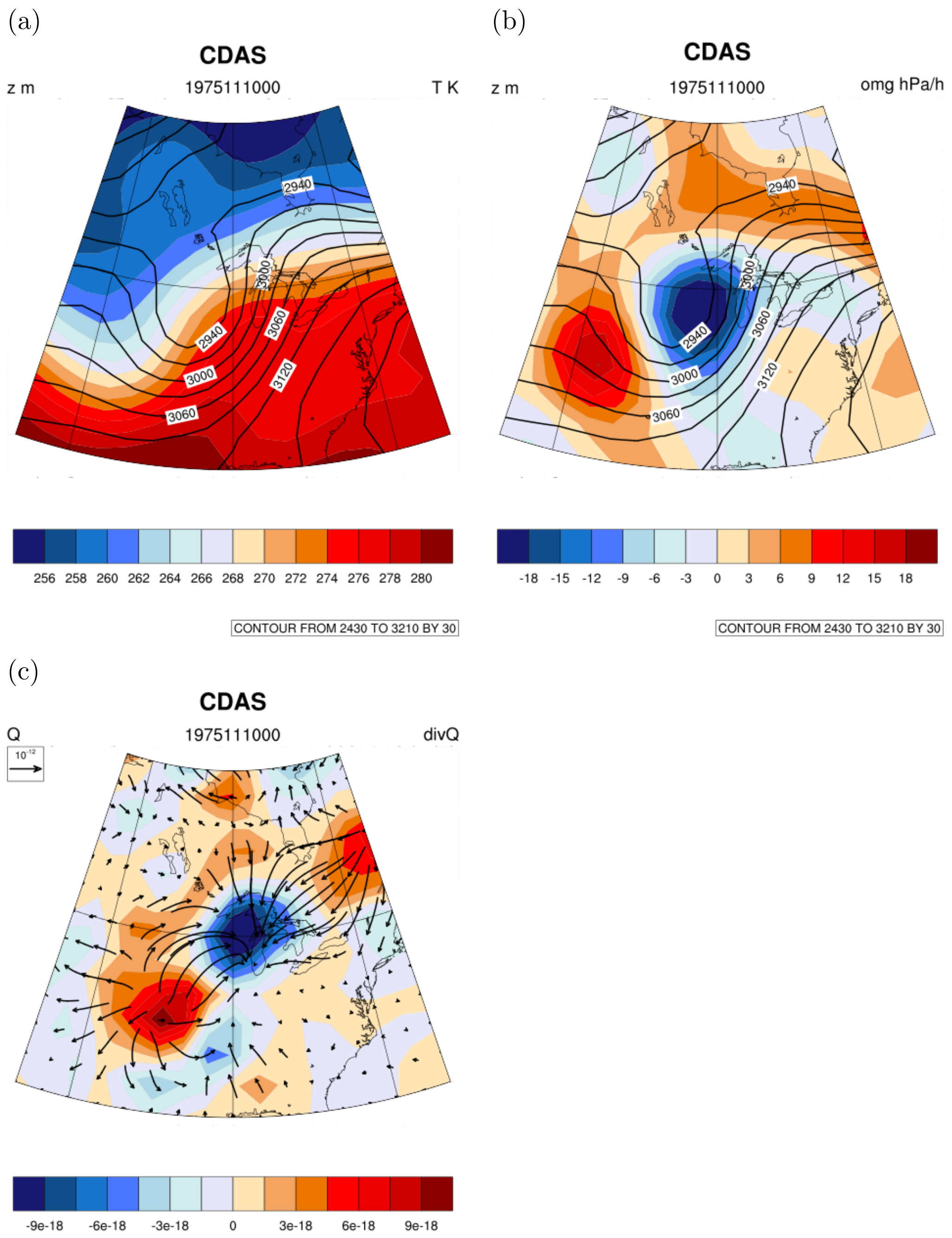
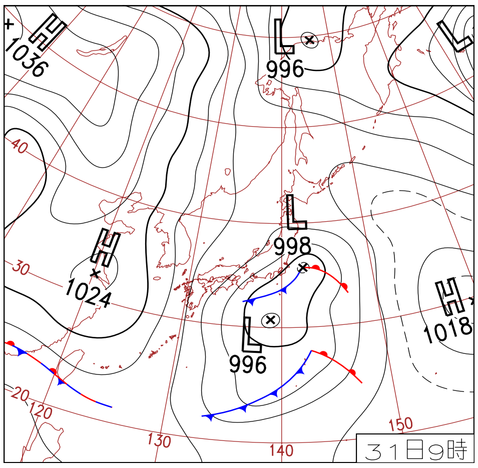



図 3.5　1975 年 11 月 10 日 0 UTC，30–60°N, 110–70°W における 700 hPa 面 (a) ジオポテンシャル高度（gpm, 等値線）及び気温（K, 色），(b) ジオポテンシャル高度（gpm, 等値線）及び鉛直 p 速度（hPa $h^{-1}$），(c) $\boldsymbol{Q}$ ベクトル（$kg^{-1}m^3s^{-3}$, 矢印）とその収束（$kg^{-1}m^2s^{-3}$，色）。NCEP/NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) を用いて作成。

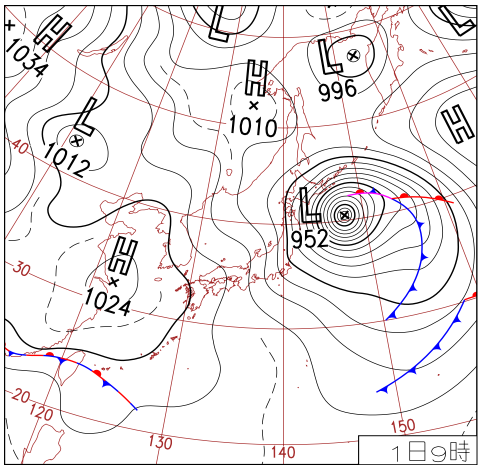
(a)




**31日(月)関東は花冷え**

南海上を低気圧が東進。東日本～東北は冷たい雨や雪で、太平洋側中心に真冬並の気温。西日本は高気圧圏内だが、寒気の影響で雲多め。静岡県御前崎市で径20ミリのひょう。

(b)




**1日(火)急発達した低気圧**

低気圧が日本の東の海上で発達。北海道東部など北日本を中心に大荒れ。東日本も荒れた天気となり、各地で陸・海・空の便に乱れ。北陸を中心に日本海側は雪や雨となり所々で雷。

図 3.6　2008 年 (a)3 月 31 日及び (b)4 月 1 日における海面気圧。高気圧（H）低気圧（L）の中心，温暖前線（赤），及び寒冷前線（赤）が記されている。日々の天気図（気象庁）。

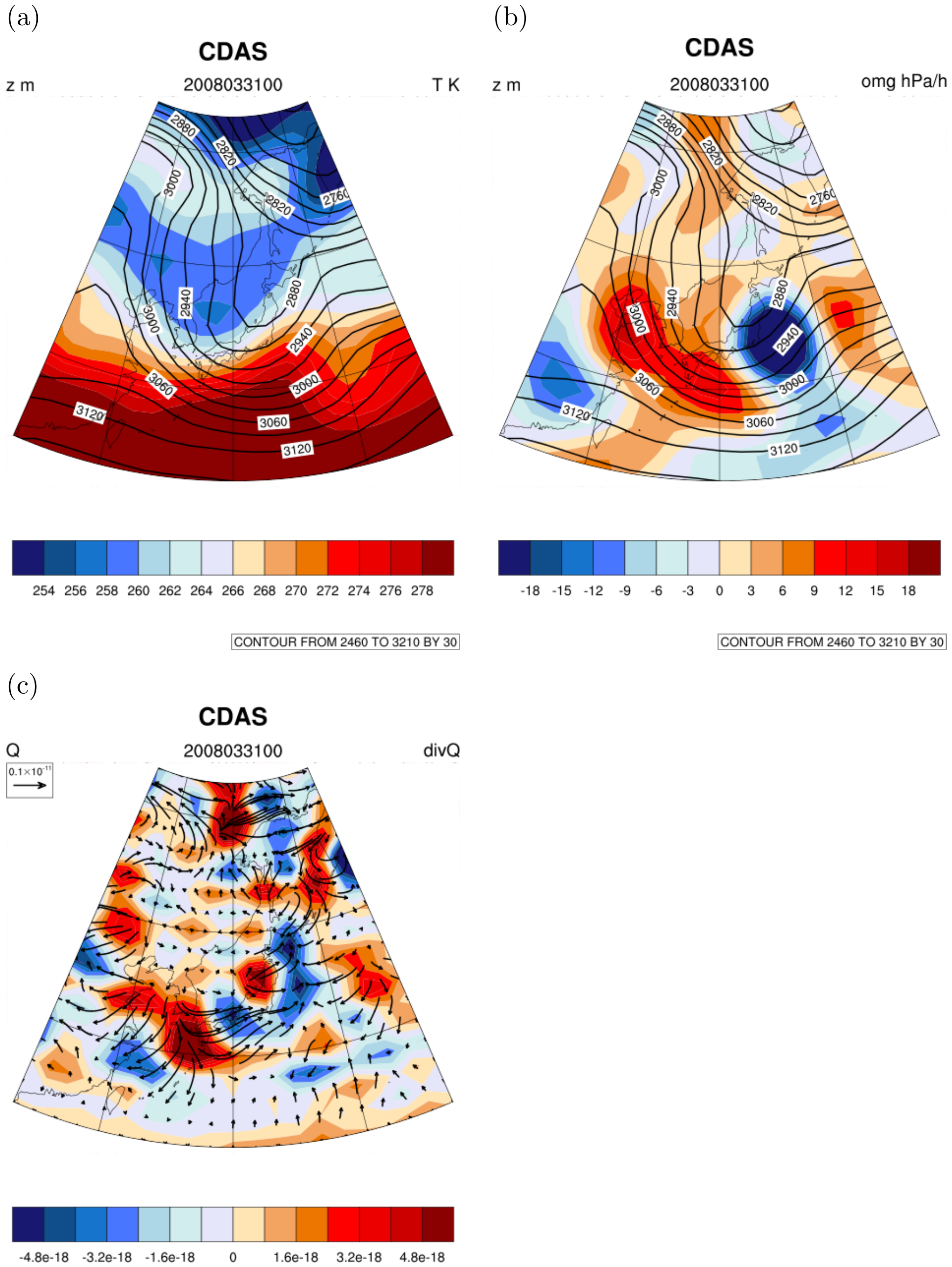



図 3.7　2008 年 3 月 31 日 0 UTC，20−−65°N, 110–165°E における 700 hPa 面 (a) ジオポテンシャル高度（gpm, 等値線）及び気温（K, 色），(b) ジオポテンシャル高度（gpm, 等値線）及び鉛直 p 速度（hPa h$^{-1}$），(c) $\boldsymbol{Q}$ ベクトル（kg$^{-1}$m$^{3}$s$^{-3}$, 矢印）とその収束（kg$^{-1}$m$^{2}$s$^{-3}$，色）。NCEP/NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) を用いて作成。

# 講義 4

# ロスビー波の伝播

## 4.1 分散関係式

線型化された準地衡渦位方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right) q' + \frac{\partial \overline{q}}{\partial y}\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \tag{4.1}$$

と書ける。ここで

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\epsilon \rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial z^*}\right),$$

は渦位擾乱

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\epsilon \rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial z^*}\right) \tag{4.2}$$

$\partial \overline{q}/y$ は，基本場の南北渦位勾配

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\epsilon \rho_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial z^*}\right) \tag{4.3}$$

である。

$N^2$ 一定，即ち $\varepsilon$ が一定のとき，波動解

$$\psi' = \Re \Psi e^{z/2H} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)} \tag{4.4}$$

を (4.1), (4.2) に代入すると，分散関係式

$$\omega = k\overline{u} - \frac{k\dfrac{\partial \overline{q}}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \varepsilon\left(m^2 + \dfrac{1}{4H^2}\right)} \tag{4.5}$$

が得られる。

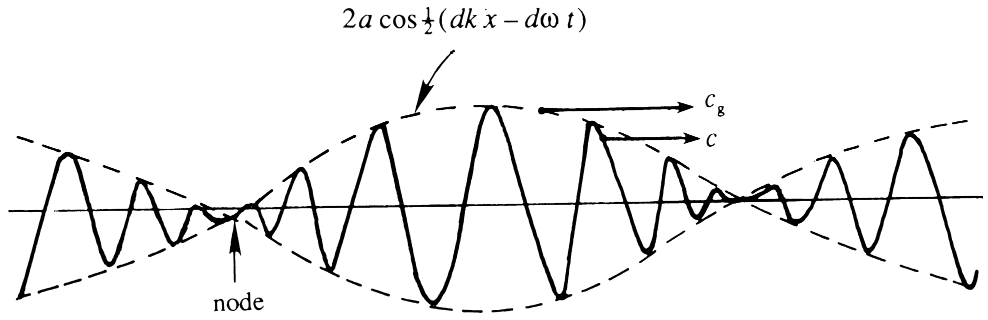



図 4.1　2 つの位相速度を持つ波の重ね合わせにより作られた, 連続した波束 (Kundu 1990). 破線は波 (実線) の包絡線を表す。

## 4.2　ロスビー波の鉛直伝播

(4.5) を見ると，波数により位相速度が異なる。波数の異なる波で構成されている波束は，その形が時間とともに崩れていく。このような性質を「分散性」と呼ぶ。波束が形を変えていく過程で, 振幅の強め合いや弱め合いが起きるので, それぞれの波長の波の位相速度とエネルギーの伝わる速度 (群速度) とは向きや大きさが当然異なる。エネルギーの移動は, 波の山谷ひとつひとつではなく, 波束の輪郭の移動により表わされる (図 4.1)。

(4.5) を微分して，群速度を求める。

$$c_{gy} = \frac{2\dfrac{\partial \overline{q}}{\partial y}}{\left[k^2 + l^2 + \varepsilon\left(m^2 + \dfrac{1}{4H^2}\right)\right]^2} kl \tag{4.6}$$

$$c_{gz} = \frac{2\varepsilon\dfrac{\partial \overline{q}}{\partial y}}{\left[k^2 + l^2 + \varepsilon\left(m^2 + \dfrac{1}{4H^2}\right)\right]^2} km \tag{4.7}$$

波動解 (4.5) は

$$\psi' = \frac{\Psi}{2} e^{z/2H}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \tag{4.8}$$

と書ける。ここで

$$\phi \equiv kx + ly + mz - \omega t \tag{4.9}$$

である。波動解を用いると，運動量フラックス及び熱フラックスは

$$\overline{v'u'} = -\frac{\Psi^2}{2} e^{z/H} kl \tag{4.10}$$

$$\overline{v'T'} = \frac{f_0 H \Psi^2}{2R} e^{z/H} km \tag{4.11}$$

となる。したがって (4.6), (4.7), (4.10), (4.11) より

$$(c_{\mathrm{g}y}, c_{\mathrm{g}z}) = \frac{4\dfrac{\partial \overline{q}}{\partial y}}{\Psi^2\left[k^2+l^2+\varepsilon\left(m^2+\dfrac{1}{4H^2}\right)\right]^2}(-\overline{v'u'}, \frac{f_0R}{N^2H}\overline{v'T'}) \tag{4.12}$$

が得られる。(4.12) より，Eliassen–Palm フラックス $\boldsymbol{F}$ の向きは局所的な群速度の向きを表すことが分かる。

## 4.3 ロスビー波の水平伝播

### 4.3.1 順圧渦度方程式

ロスビー波の水平伝播は，順圧渦度方程式で記述できる。南北シアーを持つ基本場の東西風 $\overline{u}=\overline{u}(y)$ のまわりで線型化された順圧渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi' + \beta_{\mathrm{eff}}\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \tag{4.13}$$

を考える。ここで

$$\beta_{\mathrm{eff}} = \frac{\partial(f+\overline{\zeta})}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \tag{4.14}$$

は実効ベータ（effective beta）と呼ばれる。

$x, y$ 方向に波動解を仮定して，分散関係を求める。波動解を

$$\psi' = \Re\hat{\psi}\exp i(kx+ly-\omega t) \tag{4.15}$$

とし，(4.13) に代入すると，分散関係式

$$\omega = k\overline{u} - \frac{k\beta_{\mathrm{eff}}}{k^2+l^2} \tag{4.16}$$

を得る。

### 4.3.2 ロスビー波の西進

(4.16) を $k$ で割って東向きの位相速度 $c_x$ を求めると，

$$c_x - \overline{u} = -\frac{\beta_{\mathrm{eff}}}{k^2+l^2} < 0 \tag{4.17}$$

が得られる。東西風に相対的な位相速度 $c_x-\overline{u}$ は負なので，ロスビー波は西進する。

(4.16) を $k, l$ で微分して，$x$ 方向の群速度 $c_{\mathrm{g}x}$, $y$ 方向の群速度 $c_{\mathrm{g}y}$ を求める。

$$c_{\mathrm{g}x} = \overline{u} - \frac{\beta_{\mathrm{eff}}[l^2-k^2]}{[k^2+l^2]^2}, \tag{4.18}$$

$$c_{\mathrm{g}y} = \frac{2kl\beta_{\mathrm{eff}}}{[k^2+l^2]^2} \tag{4.19}$$

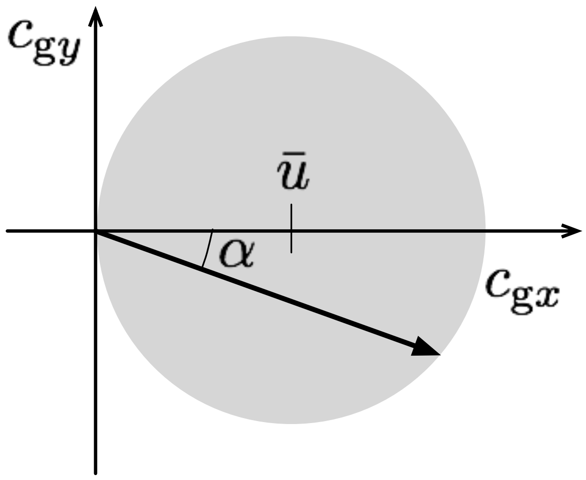



図 4.2　群速度と東西風速との関係.

を得る。東西位相速度 $c_x$ が常に負であったのに対し, 波の形状 $(k, l)$ により, 東西風に相対的な東西群速度は西向きにも東向きにもなりうる。

### 4.3.3　定常ロスビー波

位相速度 $c_x = 0$ のとき

$$\overline{u} = \frac{\beta_{\text{eff}}}{k_{\text{s}}^2} \tag{4.20}$$

が成り立つ。このようなロスビー波を定常ロスビー波と呼ぶ。ここで

$$k_{\text{s}}^2 \equiv k^2 + l^2 = \frac{\beta_{\text{eff}}}{\overline{u}} \tag{4.21}$$

を定常ロスビー波数と呼ぶ。これを (4.18), (4.19) に代入すると,

$$\boldsymbol{c}_{\text{g}} = 2\overline{u} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \frac{k}{k_{\text{s}}^2} \tag{4.22}$$

となる. 定常ロスビー波の向きは常に東向きで, $x$ 軸方向（東向き）に伝播するとき $|\boldsymbol{c}_{\text{g}}|$ は最大値 $2\overline{u}$ を取ることが分かる。

定常ロスビー波の伝播は，Snell の法則に従う光波に類似している (Hoskins and Ambrizzi 1993)。式 (4.22) は

$$\boldsymbol{c}_{\text{g}} = 2\overline{u} \begin{pmatrix} \dfrac{k}{k_{\text{s}}} \\ \dfrac{l}{k_{\text{s}}} \end{pmatrix} \frac{k}{k_{\text{s}}} \tag{4.23}$$

$$= 2\overline{u} \begin{pmatrix} \hat{k} \\ \hat{l} \end{pmatrix} \cos\alpha \tag{4.24}$$

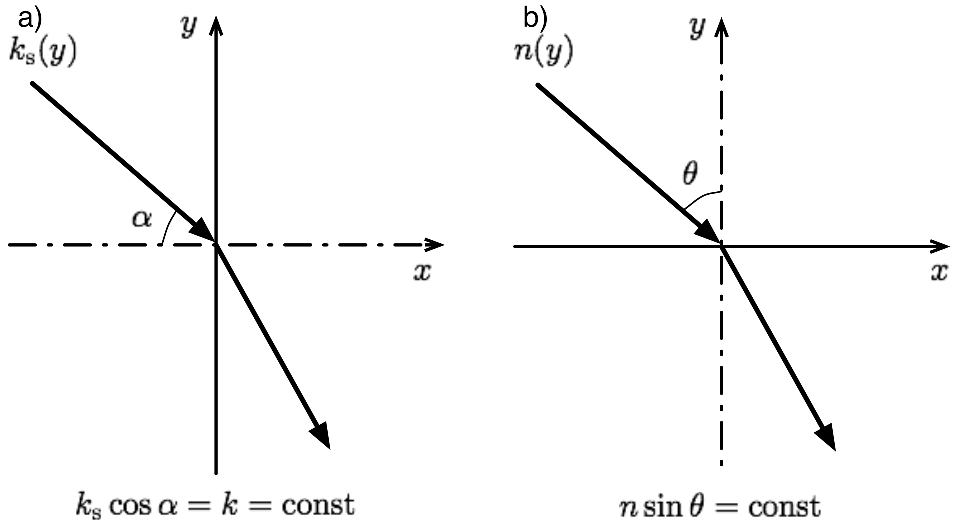



図 4.3　(a) ロスビー波の伝播と (b) 光波の伝播との類比。

と書ける。$(\hat{k}, \hat{l})$ は 単位ベクトルなので, 波は $x$ 軸に対して $\alpha$ の角度で伝播することが分かる。$\cos\alpha$ の定義より

$$k = k_s \cos\alpha = \mathrm{const} \tag{4.25}$$

と書ける。これは, 屈折率 $n$, $y$ 軸に対する角度 $\theta$ で伝播する光波について成り立つ Snell の法則

$$n \sin\theta = \mathrm{const} \tag{4.26}$$

と同形である。式 (4.25) と (4.26) とを比較すると, 定常ロスビー波数 $k_s$ が屈折率に相当することが分かる。

光波同様, 定常ロスビー波も $k_s$ の大きなところに向かって伝播する (Fermat の原理, 図 4.4A)。$k_s$ の極大があれば, そこに捕捉される (図 4.4E)。このように「鋭い」偏西風は, 「導波管」と呼ばれる。

式 (4.21) を $l$ について解くと,

$$l = \pm\sqrt{k_s^2 - k^2} \tag{4.27}$$

となる. $l > 0$ のとき北向き, $l < 0$ のとき南向き伝播を表す. 通常対流圏上層では, $k_s$ は中緯度から亜熱帯に向かって増加している (図 4.5)。高緯度に向かって $k_s$ が減少して, $k = k_s$ となる緯度を転移緯度（turning latitude) と呼ぶ。転移緯度より極よりでは, 振幅が指数函数的に減少 (evanescent) する。転移緯度では, $l$ が符号を変え, 波の向きが変わるため, 波は低緯度に反射される（図 4.4B)。実効ベータが負になる領域も波の反射板（reflector）として働く（図 4.4C)。一方, 赤道付近に東風域と中緯度の西風との間に $\bar{u} = 0$ となる緯度（臨界緯度 critical latitude）が存在する。臨界緯度に近づくと, 式 (4.21) から明らかなように, $k_s$ が急速に大きくなる。臨界緯度は定常ロスビー波の「ブラックホール」である (図 4.4D)。

非線型性を考慮すると, 波は臨界緯度付近の南北に狭い領域で, 進む向きが逆転して反射されることが示されている (図 4.6, Stewartson 1978, Warn and Warn 1978; SWW 解)。SWW 解は, Kelvin の猫目 (cat’s eye) と呼ばれる流れのパターンである。

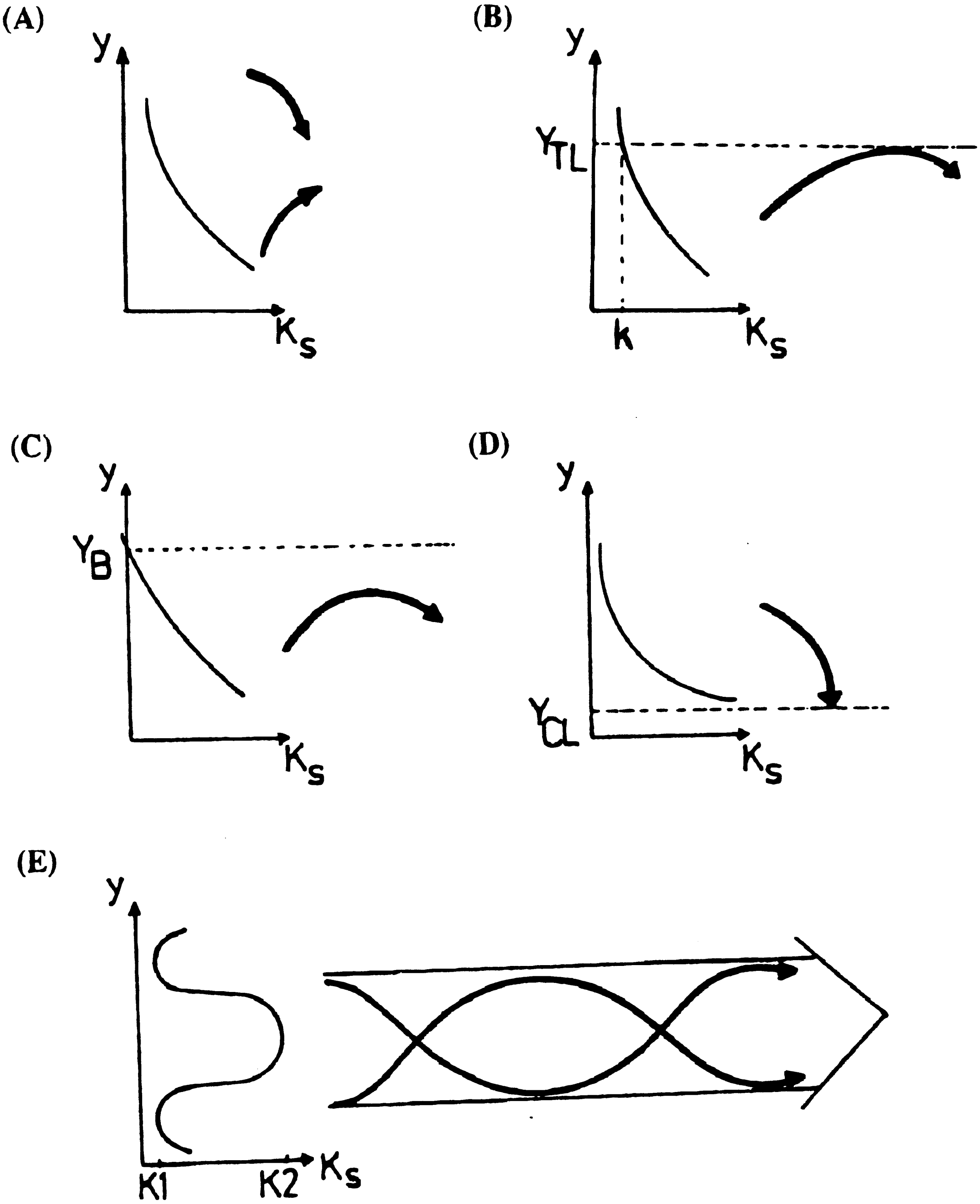



図 4.4　定常ロスビー波の屈折や反射 (Hoskins and Ambrizzi 1993)。(A) 屈折，(B) 転移緯度での反射，(C) $\beta_{\mathrm{eff}} = 0$ となる緯度での反射，(D) 臨界緯度での吸収，(E) ジェット気流によるロスビー波の捕捉。

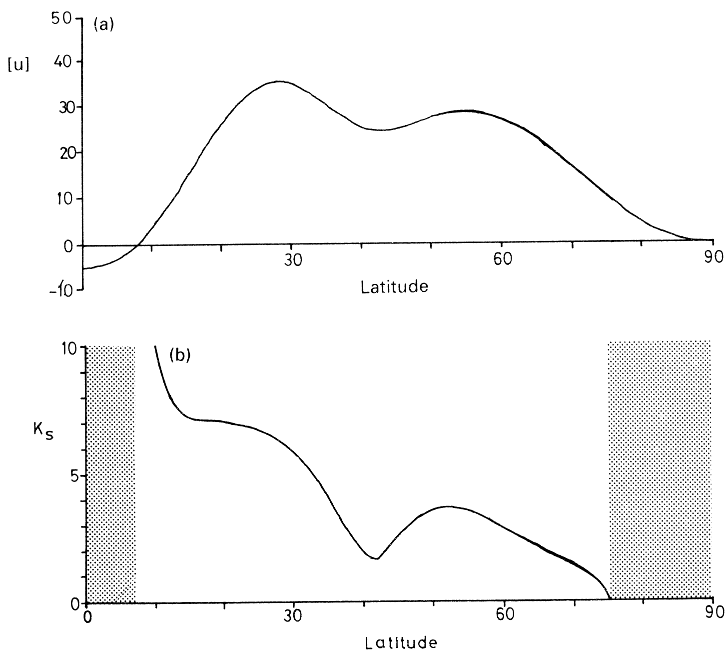



図 4.5　南半球冬季における帯状平均 (a) 東西風速 ($\mathrm{m\,s^{-1}}$) 及び (b) 定常ロスビー波数 $k_\mathrm{s}$ の南北分布 (James 1994)。

### 4.3.4　北半球冬季・夏季の導波管

ここでは, 北半球対流圏上部における定常ロスビー波の気候学的な通り道を調べておこう (図 4.7)。

北半球冬季には, 日本付近と北米東岸に東西風の極大がある。$\beta_\mathrm{eff}$ で見ると, 極大の南北両側で負となる領域がある。このような領域は, 図 4.4E のような導波管の構造をしている。太平洋東部には, $k_\mathrm{s}$ の大きな領域が赤道まで伸びている。この領域は西風ダクト (westerly duct) と呼ばれており, 両半球の間でエネルギー交換が行われると考えられている。エルニーニョ等の年々変動により, 西風ダクトが出来ない年もある。

北半球夏季には, チベット高気圧の北縁に東西風の極大が存在している。風速は, 冬季ほど大きくはないが, $k_\mathrm{s}$ では同程度の大きさである。値は小さいが, 北極海沿岸にも波の伝播可能域が存在することも注目に値する。太平洋の導波管は, 亜熱帯から伸び, 北大西洋の導波管につながり, 北太平洋の導波管は, 亜寒帯ジェットに伴う北極海沿岸に連なる渦巻き構造をしている。

### 課題

- 2015 年 7 月のアジア・ジェット上の定常ロスビー波の活動について調べ, 梅雨明けとの関係について議論せよ。
- 高度の東西偏差や南北風の時間–高度断面図を作成し, 低気圧の下流発達の事例とそれに伴う気象災害との対応について調べよ。

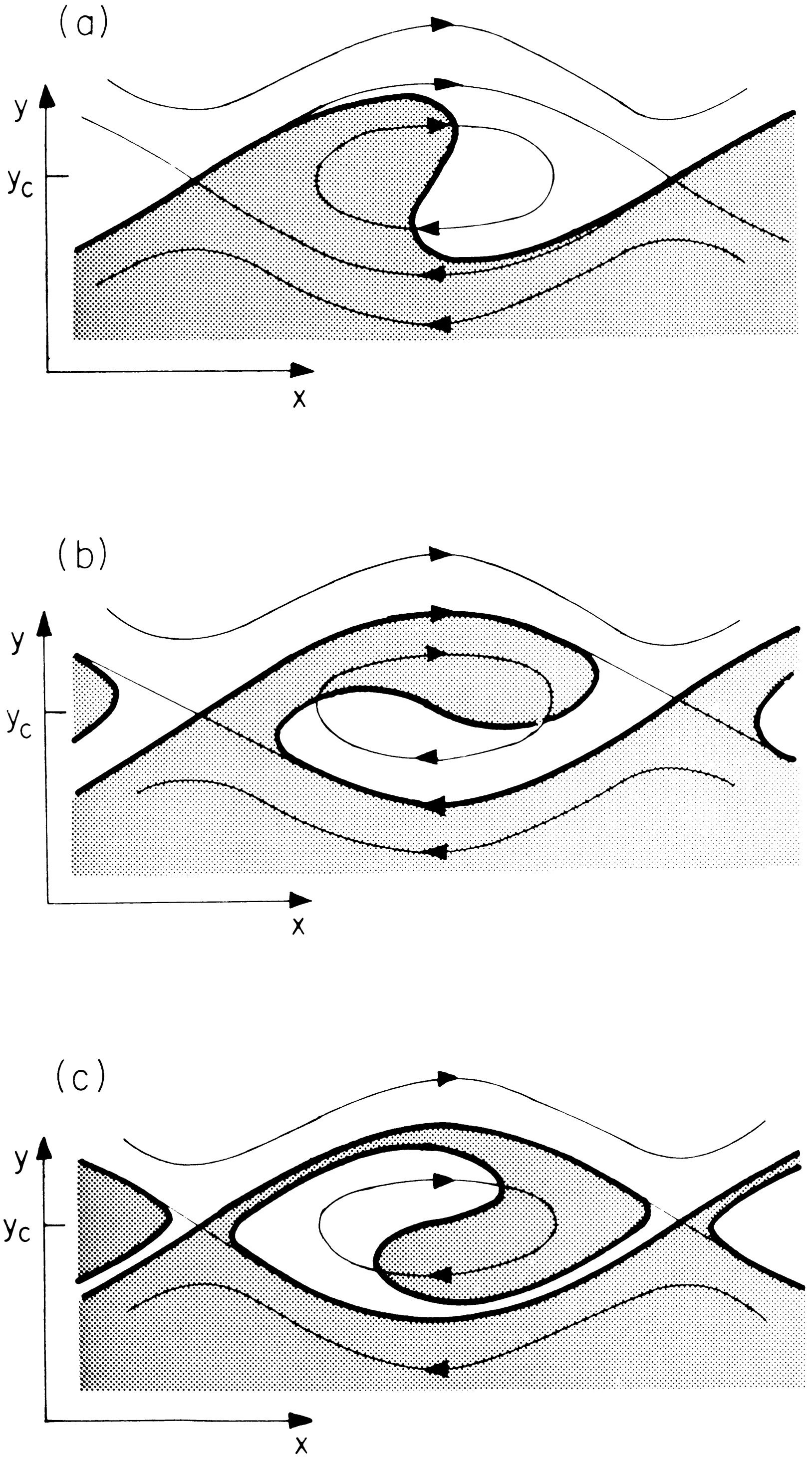



図 4.6　臨界緯度付近での SWW(Stewartson 1978; Warn and Warn 1978) 解の模式図 (Andrews et al. 1987)。

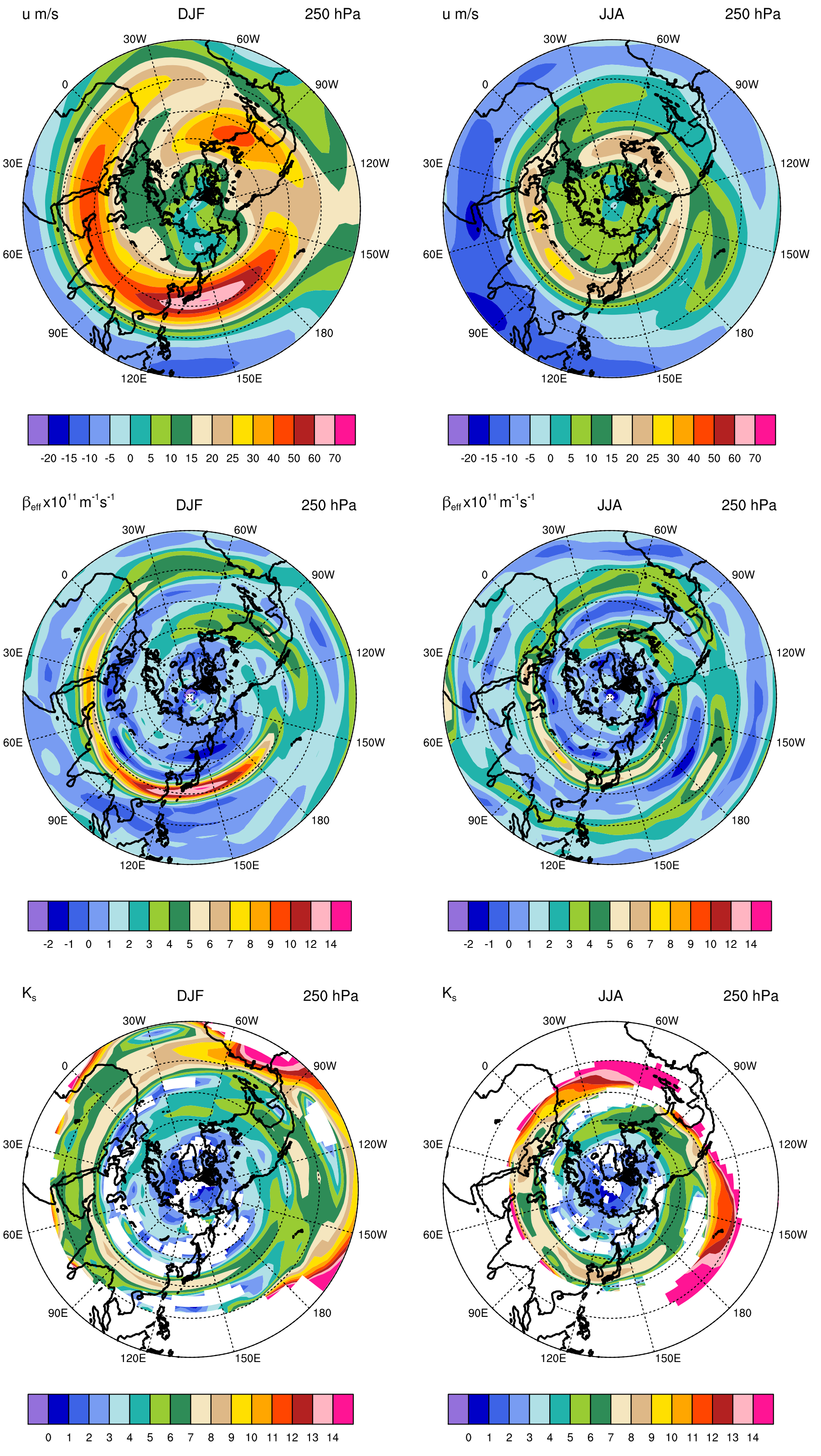



図 4.7　NCEP/NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) 気候値 (1968–1996 年の各季節を平均して作成) から作成した上から東西風, 有効ベータ, 定常ロスビー波波数。左列は 12, 1, 2 月平均, 右列は 6, 7, 8 月平均。

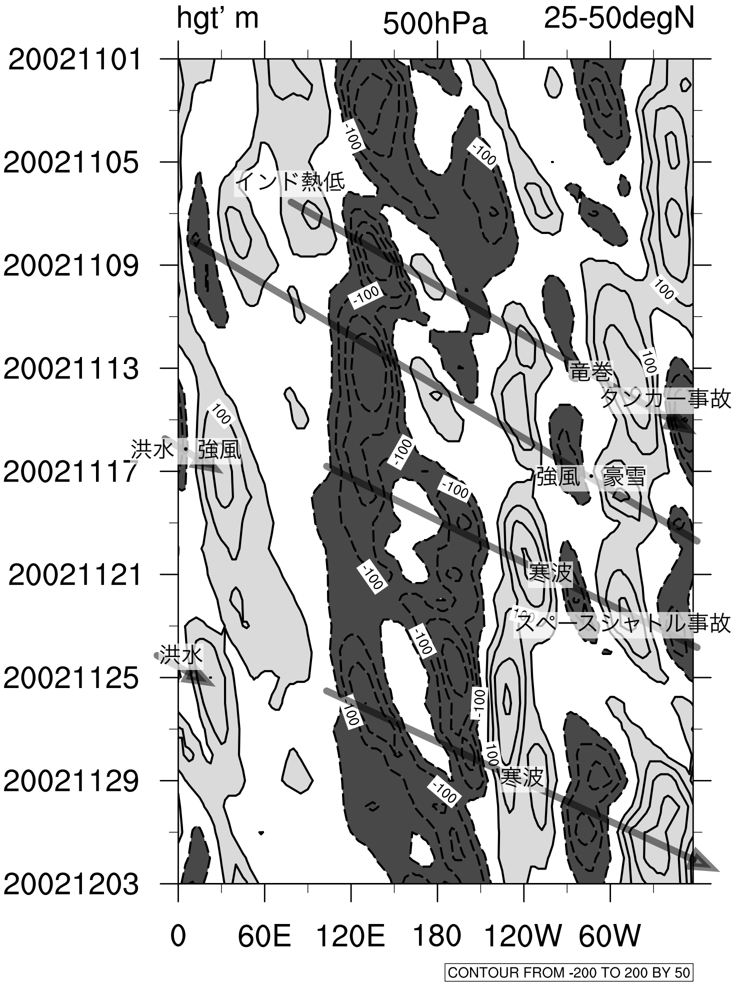



図 4.8　2002 年 11 月の 500 hPa 面ジオポテンシャル高度の東西偏差 (等値線間隔 50 m) の時間–経度断面図．25–50°N 平均．NCEP–NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) 日平均データから作成．

# 講義 5

# 低緯度の循環

## 5.1 浅水方程式系

平均深さ $H$，水面の凹凸 $\eta$，密度 $\rho$ 一定の海を考え，静水圧平衡を仮定する。水面での圧力を 0 とすると

$$p = -\rho_0 g(\eta + H - z) \tag{5.1}$$

と書ける。支配方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) \tag{5.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + fu = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho_0 g \tag{5.5}$$

となる。鉛直流速は，連続の式 (5.4) と境界条件 $w(0) = 0$ を用いると

$$w = -\int_0^{H+\eta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}z = -(H+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{5.6}$$

よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + g(H+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{5.7}$$

を得る。線型化された擾乱の方程式系は $p'/\rho_0$ を $p$ と書くと次のようになる（$'$ 省略)。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + gH\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{5.10}$$

## 5.2　変数分離

$\log p$ 座標系での摂動方程式系は次のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0 \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + N^2 w = 0 \tag{5.14}$$

式 (5.13) と (5.14) から $w$ を消去すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho_0}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\right] \tag{5.15}$$

となる。式 (5.15) の右辺が $\partial\phi/\partial t$ に比例すると仮定し，次のように水平と鉛直とを分離する。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \phi_n \end{pmatrix}(x, y, t)\hat{\phi}(z) \tag{5.16}$$

これを式 (5.11), (5.12), (5.15) にすると水平構造方程式

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - fv_n = -\frac{\partial \phi_n}{\partial x} \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + fu_n = -\frac{\partial \phi_n}{\partial y} \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + gh\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y}\right) = 0 \tag{5.19}$$

及び鉛直構造方程式

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\rho_0}{N^2}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}z}\right) = -\frac{1}{gh}\hat{\phi} \tag{5.20}$$

を得る。比例定数を $-1/gh$ に取ったのは第 5.1 節で求めた浅水方程式系の類比で，$h$ は等価深度と呼ばれている。

## 5.3　熱源に対する大気の応答

ここでは，Gill (1980) に従って赤道付近で局在化された熱源に対する大気の応答を考える。鉛直方向には傾圧第一モード（$n = 1$）のみを考え，第 5.2 節で求めた水平構造方程式を用いる。赤道 $\beta$ 平面近似（$f = \beta y, f_0 = 0$）を仮定し，水平スケールを $l_n \equiv \sqrt{c/2\beta}, c = \sqrt{gh}$，時刻を $l/c$, $(u, v), \phi$ を

それぞれ $c, c^2$ でスケールし $\phi$ を $p$ と書くと，無次元化された方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}yv = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}yu = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -Q \tag{5.23}$$

$$w = \frac{\partial p}{\partial t} + Q \tag{5.24}$$

を得る。ここで $Q$ は加熱率に比例し，正の時に加熱，$u, v, p$ の符号は地表面での符号を表す。

レイリー摩擦とニュートン冷却を仮定し，その係数 $\varepsilon$ は等しいとする。定常解は $\partial/\partial t + \varepsilon$ を $\varepsilon$ で置き換える。式 (5.22) の $\varepsilon v$ は $\varepsilon$ が小さく，強制の東西スケールが $2\varepsilon$ に比べて小さい $2\varepsilon k << 1$ より無視できる。

$$\varepsilon u - \frac{1}{2}yu = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5.25}$$

$$\frac{1}{2}yv = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{5.26}$$

$$\varepsilon p + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -Q \tag{5.27}$$

$q = p + u, r = p - u$ とおくと

$$\varepsilon q + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}yv = -Q \tag{5.28}$$

$$\varepsilon r - \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}yv = -Q \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{1}{2}yq + \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{1}{2}yr = 0 \tag{5.30}$$

ところで，エルミート多項式 $H_n(y) = (-1)^n e^{y^2/2} \mathrm{d}_{\mathrm{d}}^{n} x^n e^{-y^2/2}$ を用いて，放物柱函数は

$$D_n(y) \equiv e^{-y^2/4} H_n(y) \tag{5.31}$$

と定義され，次のような性質がある。

$$\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{2}yD_n = nD_{n-1} \tag{5.32}$$

$$\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{2}yD_n = -D_{n+1} \tag{5.33}$$

$D_n(y)$ の定義 (5.31) と (5.32), (5.33) を用いると

$$(D_0, D_1, D_2, D_3) = \left[1, y, y^2, y(y^2 - 3)\right] e^{1/4y^2} \tag{5.34}$$

と具体的な形が得られる。次のように (5.28), (5.29), (5.30) の $q, r, v, Q$ が $y$ 方向に $D_n(y)$ で展開できるとする。

$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ v \\ Q \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} q_n(x) \\ r_n(x) \\ v_n(x) \\ Q_n(x) \end{pmatrix} D_n(y) \tag{5.35}$$

(5.35) を (5.28), (5.29), (5.30) に代入し，(5.32), (5.33) を用いると

$$\varepsilon q_0 + \frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}x} = -Q_0 \tag{5.36}$$

$$q_1 = 0 \tag{5.37}$$

$$(2n+1)\varepsilon q_{n+1} - \frac{\mathrm{d}q_{n+1}}{\mathrm{d}x} = -Q_{n-1} - nQ_{n+1},\ n \geq 0 \tag{5.38}$$

が得られる。$Q_0$ または $Q_1$ だけを考えるので，以下 (5.38) の右辺の $nQ_{n+1}$ は考慮しない。

熱源 $Q_0$ または $Q_1$ の東西方向の構造は

$$F(x) = \begin{cases} \cos kx & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases} \tag{5.39}$$

とする。ここで $k = \pi/2L$ である。

(5.36) の解は

$$q_0 = \begin{cases} 0 & x \leq -L \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2 + k^2}\left[\varepsilon \cos kx + k \sin kx + ke^{-\varepsilon(x+L)}\right] & x < |L| \\ -\dfrac{k}{\varepsilon^2 + k^2}\left\{1 + \exp(-2\varepsilon L)\right\} e^{\varepsilon(L-x)} & x \geq L \end{cases} \tag{5.40}$$

(5.38) の解は

$$q_{n+1} = \begin{cases} -\dfrac{k}{(2n+1)^2\varepsilon^2 + k^2} e^{(2n+1)\varepsilon(x+L)}\left[1 + e^{-2(2n+1)\varepsilon L}\right] & x \leq -L \\ -\dfrac{1}{(2n+1)^2\varepsilon^2 + k^2}\left[(2n+1)\varepsilon \cos kx - k \sin kx + ke^{(2n+1)\varepsilon(x-L)}\right] & x < |L| \\ 0 & x \geq L \end{cases} \tag{5.41}$$

$q_0, q_{n+1}$ の東西平均値は

$$\int_{-\infty}^{\infty} (q_0, q_{n+1})\mathrm{d}x = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1, \frac{1}{2n+1}\right) I \tag{5.42}$$

ここで

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{k} = \frac{4L}{\pi} \tag{5.43}$$

### 5.3.1　赤道に対称な熱源に対する応答

赤道に対称な熱源 $Q_0 = F(x)$

$$Q(x,y) = Q_0 D_0(y) = F(x)e^{-y^2/4} \tag{5.44}$$

について微分方程式 (5.36)–(5.38) を解く。

赤道対称な熱源に対する応答は二つに分かれる。そのひとつは $q_0$ だけで決まり，東進するとともに減衰するケルビン波を表す。位相速度は 1 で減衰率は $\varepsilon$ である。西に情報が伝わらないので，$x < -L$ で振幅は 0 である。

$$u = p = \frac{1}{2}q_0(x)e^{-y^2/4} \tag{5.45}$$

$$v = 0 \tag{5.46}$$

$$w = \frac{1}{2}\left[\varepsilon q_0(x) + F(x)\right]e^{-y^2/4} \tag{5.47}$$

この解は強制域で上昇し，上空で西風，下層で東風が赤道に沿って吹くウォーカー循環を表す。これに対応する赤道に沿った低圧部があり，強制域の方に向かって気圧が西ほど低くなっている。

もう一つの応答は $n = 1$ とした (5.38) の解

$$u = \frac{1}{2}(1+y^2)e^{-y^2/4} \tag{5.48}$$

$$p = \frac{1}{2}(y^2-3)e^{-y^2/4} \tag{5.49}$$

$$v = \left[F(x) + 4\varepsilon q_2(x)\right]ye^{-y^2/4} \tag{5.50}$$

$$w = \frac{1}{2}\left[F(x) + q_2(x)(1+y^2)\right]e^{-y^2/4} \tag{5.51}$$

で $n = 1$ の西進惑星波で位相速度が 1/3, 減衰率が $3\varepsilon$ である。

強制の西側（$x < -L$）では正味の西風となっている。

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\mathrm{d}y = -\sqrt{\pi}q_2(x) \tag{5.52}$$

強制域（$|x| < L$）では，南北風が熱源から極向きに吹いている。$\varepsilon \to 0$ の極限で

$$(v,w) \to (y,1)F(x)e^{-1/4y^4} \tag{5.53}$$

となる。(5.25) と (5.26) が渦度方程式を作ると，$\varepsilon \to 0$ で

$$y\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{5.54}$$

となり収束（あるいは加熱）による渦度の生成が赤道付近からの惑星渦度の移流とバランスしている。

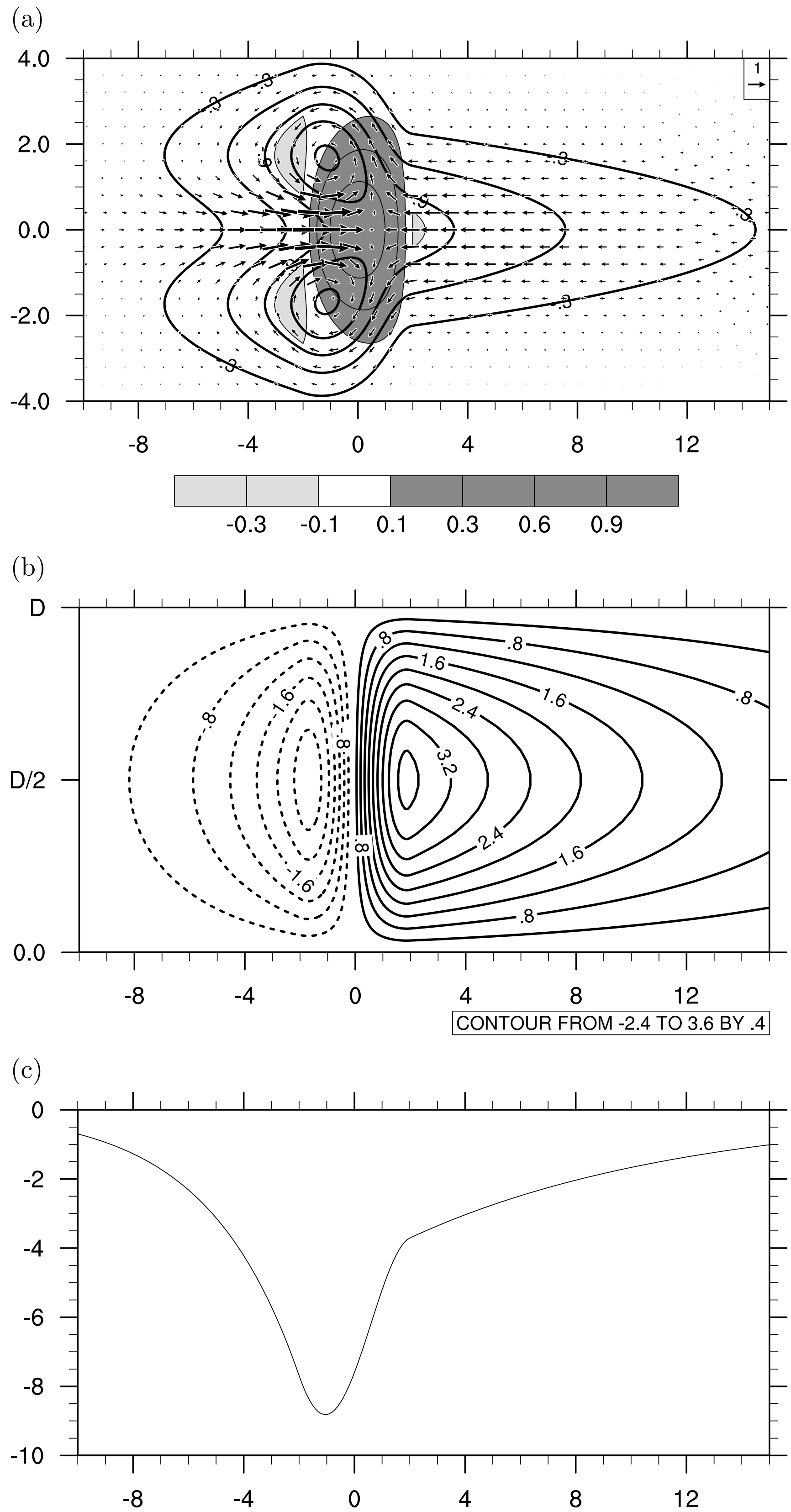



図 5.1　赤道に対称な熱源対する応答。(a) 矢印は $(u, v)$，陰影は $w$，等値線は $p$, 南北積分された (b)$u, w$ の流線函数と (c)$p$.

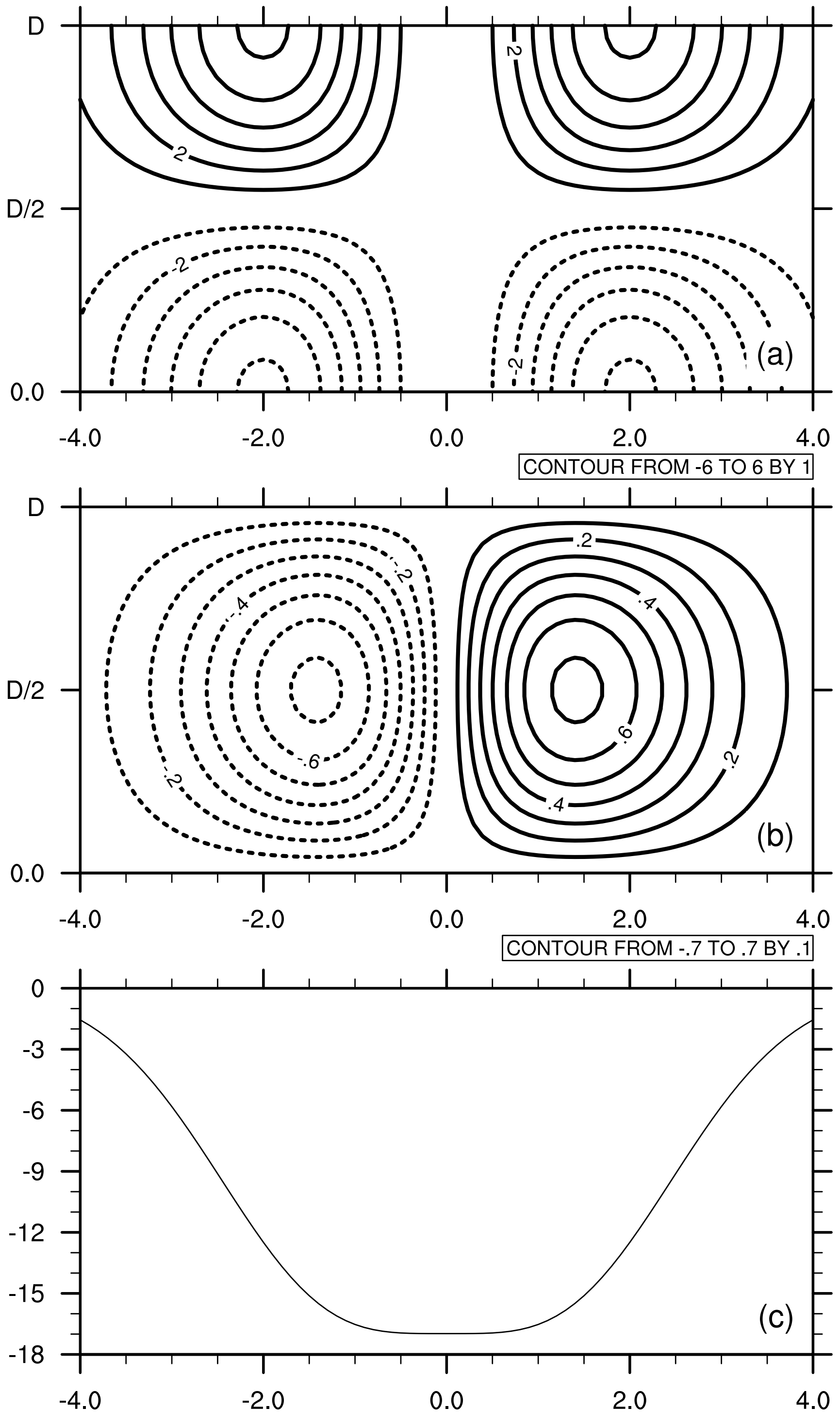



図 5.2　赤道に対称な熱源対するハドレー循環。(a) $u$, (b) $(u, w)$ の流線函数 , (c) $p$.

### 5.3.2 赤道反対称な熱源に対する応答

赤道に反対称な熱源 $Q_1 = F(x)$

$$Q(x,y) = Q_1 D_1(y) = F(x) y e^{-y^2/4} \tag{5.55}$$

について微分方程式 (5.36)–(5.38) を解く。

(5.55) に対する応答も二つの部分から構成されている。

ひとつは $n=0$ の混合ロスビー重力波 (5.37) で，熱源の外には伝播しない。もうひとつは $n=2$ の惑星波である。これらを合わせた解は次のように書ける。

$$p = \frac{1}{2} q_3(x) y^3 e^{-y^2/4} \tag{5.56}$$

$$u = \frac{1}{2} q_3(x)(y^2-6) y e^{-y^2/4} \tag{5.57}$$

$$v = \left[6\epsilon q_3(x)(y^2-1) + F(x) y^2)\right] e^{-y^2/4} \tag{5.58}$$

$$w = \left[\frac{1}{2} q_3(x) y^2 + F(x)\right] y e^{-y^2/4} \tag{5.59}$$

## 課題

- 赤道反対称な熱源に対する応答について解を求めよ。
- 赤道を挟んで発生した二つの熱帯低気圧の事例を探してみよ。
- 熱源に対する応答の観点からモンスーン循環について議論せよ。
- 東西一様な熱源に対する応答を求め，ITCZ について議論せよ。

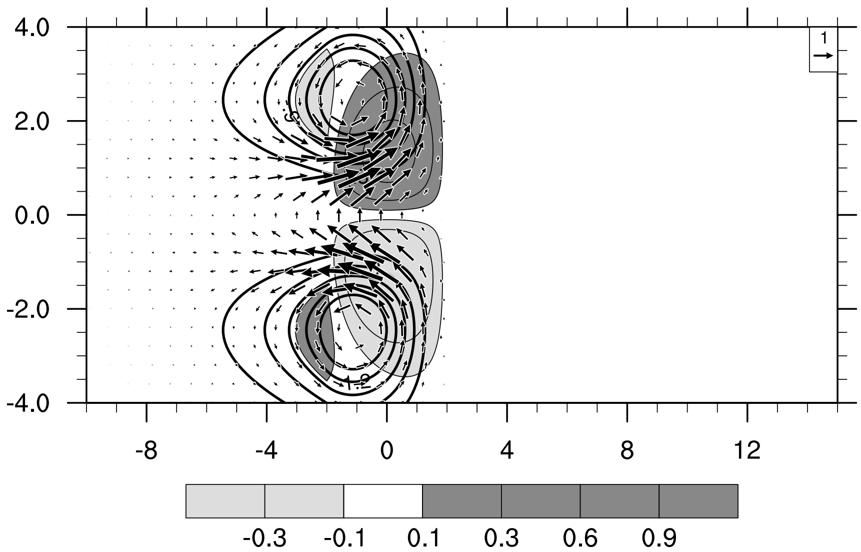



図 5.3　赤道に反対称な熱源対する応答。矢印は $(u, v)$，陰影は $w$，等値線は $p$.

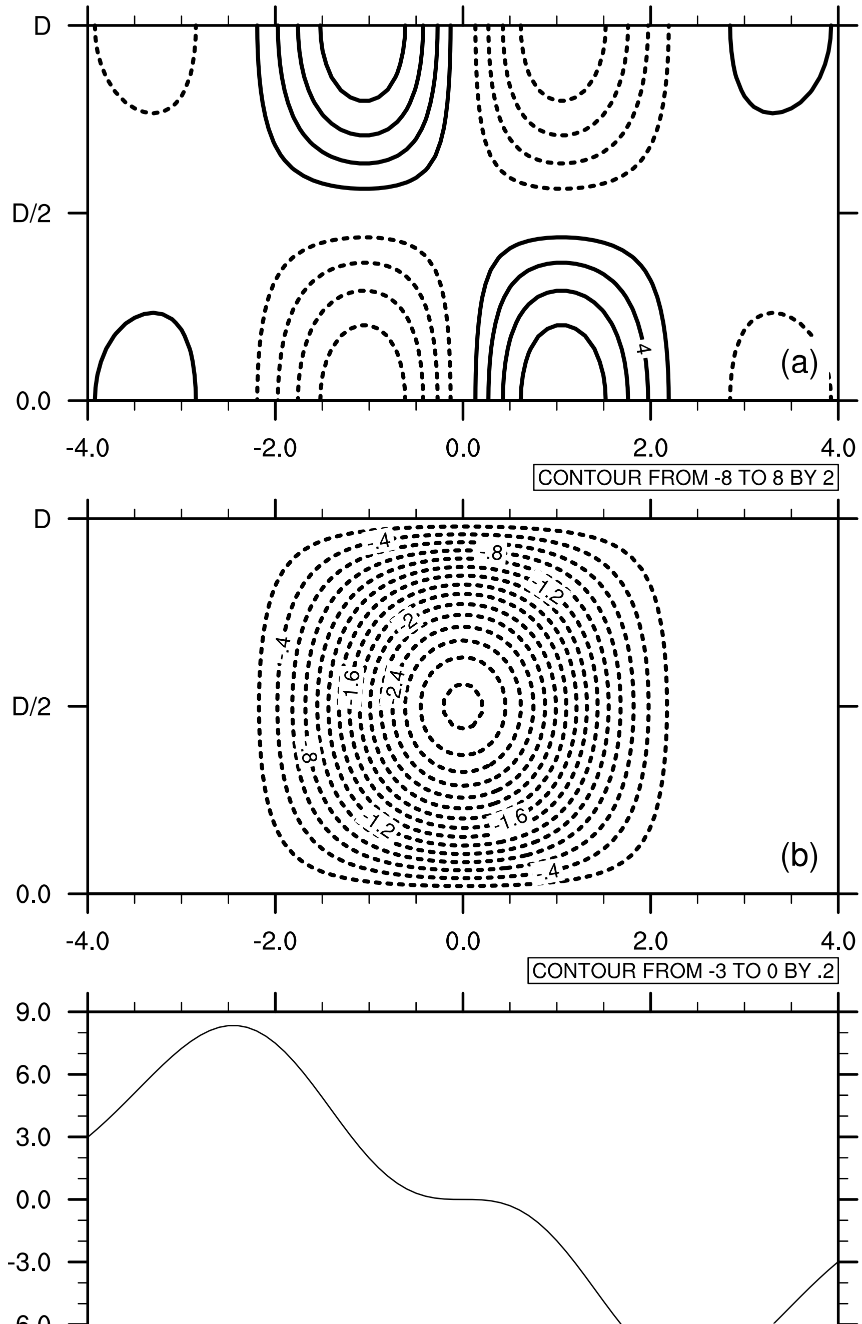



図 5.4　赤道に反対称な熱源対するハドレー循環。(a) $u$, (b) $(u, w)$ の流線函数 , (c) $p$.

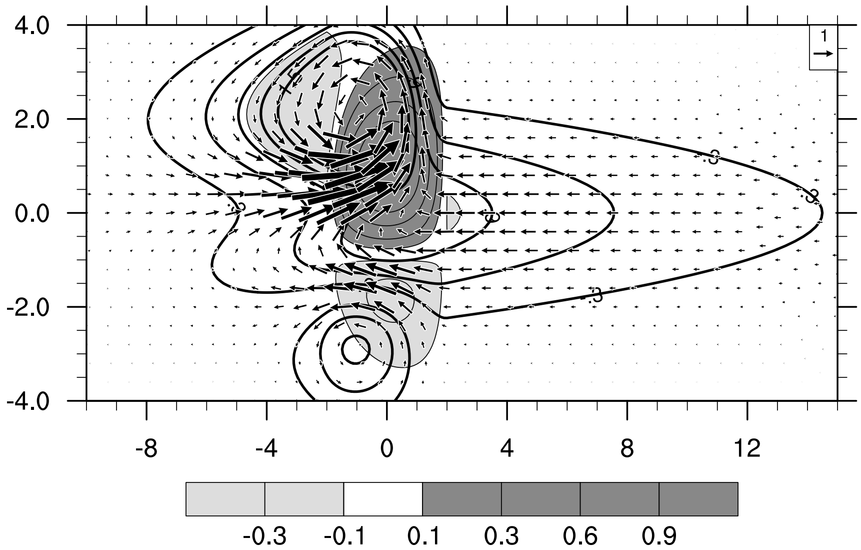



図 5.5　赤道に対称な熱源と反対称な熱源との和に対する応答。矢印は $(u, v)$，陰影は $w$，等値線は $p$.

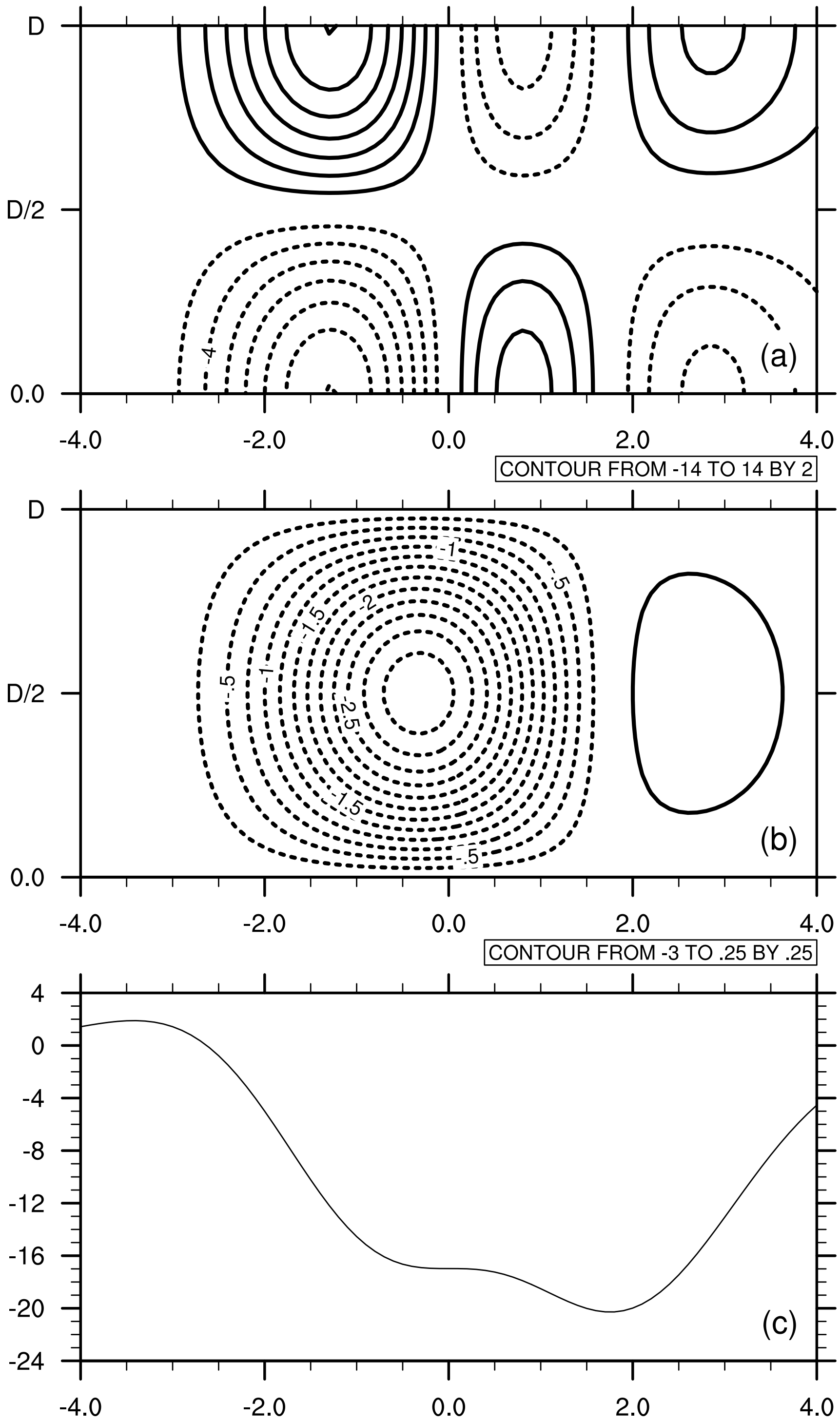



図 5.6　赤道に対称な熱源と反対称な熱源との和に対するハドレー循環。(a) $u$, (b) $(u, w)$ の流線函数 , (c) $p$.

# 参考文献


Andrews, D. G., R. Holton, James, and C. B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*. Academic Press, 489 pp.

Arakawa, A. and C. S. Konor, 2009: Unification of the anelastic and quasi-hydrostatic systems of equations. *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 710–726.

Dima, I. M. and J. M. Wallace, 2003: On the seasonality of the Hadley cell. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 1522–1527.

Durran, D. R., 1989: Improving the anelastic approximation. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1453–1461.

Gill, A. E., 1980: Some simple solutions for heat-induced tropical circulation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **106**, 447–462.

Hartmann, D. L., 2007: The atmospheric general circulation and its variability. *J. Meteor. Soc. Japan*, **85B**, 123–143.

Hoskins, B. J. and T. Ambrizzi, 1993: Rossby wave propagation on a realistic longitudinally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1661–1671.

Hoskins, B. J., I. Draghichi, and H. C. Davies, 1978: A new look at the $\omega$ equation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **104**, 31–38.

Hoskins, B. J. and M. A. Pedder, 1980: The diagnosis of middle latitude synopitc development. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **106**, 707–719.

James, I. N., 1994: *Introduction to circulating atmospheres*. Cambridge Atmosphere and Space Science Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 422 pp.

Kållberg, P., P. Berrisford, B. Hoskins, A. Simmons, S. Uppala, S. Lamy-Thépaut, and R. Hine, 2005: ERA-40 atlas. Tech. Rep. 19, European Centre for Meidum-range Weather Forecasts, 185 pp.

Kalnay, E., et al., 1996: The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **77**, 437–471.

Kasahara, A., 1974: Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, **102**, 509–522.

Kundu, P. K., 1990: *Fluid Mechanics*. Academic Press, 638 pp.

Ogura, Y. and N. Phillips, 1962: Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 173–179.

Sanders, F. and B. J. Hoskins, 1990: An easy method for estimation of Q-vectors from weather maps. *Wea. Forecasting*, **5**, 346–353.

Stewartson, K., 1978: The evolution of the critical layer of a Rossby wave. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **9**, 185–200.

Uppala, S. M., et al., 2005: The ERA-40 re-analysis. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 2961–3012.

Warn, T. and H. Warn, 1978: The evolution of a nonlinear Rossby wave critical level. *Stud. Appl. Math.*, **59**, 37–71.