応用気象学 IA

榎本剛

2025-06-22

Table of contents

はじめに

この講義ノートは、総観規模の気象力学からいくつかの基礎的な題材を取り上げて記述したものです。

第 1 章

スケール解析

この講義では、Haltiner and Williams (1980) に基づきスケール解析について議論する。

スケール解析（scale analysis）とは、支配方程式の各項の大きさを系統的に比較する手法である。スケール解析とエネルギーの検討に基づいて、力学解析や数値天気予報に用いられる一貫したモデルを定式化することができる。

変数は時空間的に特徴的なスケール（大きさ）を持つとする。

- L = 特徴的な水平スケール（およそ 1/4 波長）
- T = 局所的な時間スケール（およそ局所的な 1/4 周期）
- V = 特徴的な水平速度

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\partial u}{\partial y} &\sim \frac{V}{L} \\
\frac{\partial u}{\partial t} &\sim \frac{V}{T}
\end{aligned}
$$

浅水波方程式は自由境界面を伴った非圧縮流体の静力学運動を記述し、慣性重力波とロスビー波の両方が含まれている。

$$
\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0 \tag{1.1}
$$

$$
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{1.2}
$$

波の位相速度を C とすると時間スケールは $T = L/C$ であり、総観規模運動で $C \sim V$ とすると移流時間スケール $T = L/V$ となる。$L \sim 10^6$m 及び $V \sim 10$ m/s とすると $T \sim 10^5$ s（およそ 1 日）となり、総観規模擾乱の 1/4 周期として妥当な値である。

Equation 1.1 の各項は次のようにスケールされる。

$$
\begin{aligned}
\partial \mathbf{V}/\partial t &\sim V^2/L = R_o f V \\
\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V} &\sim V^2/L = R_o f V \\
f\mathbf{k}\times\mathbf{V} &\sim fV
\end{aligned}
$$

ここで $Ro = V/fL$ はロスビー数でコリオリ力に対する加速の比を表す。総観規模の典型的な値と $f \sim 10^{-4}$ では、ロスビー数は $Ro = 0.1$ となる。大気海洋の様々な運動においてロスビー数は小さい。

ロスビー数が小さいとき、加速はコリオリ力や移流に比べて小さい。結果としてコリオリ力は気圧傾度力のみと釣り合う。

$$
\nabla\phi \sim fV \tag{1.3}
$$

連続の式 Equation 1.2 を解析するために、ϕ を定数 $\bar{\phi}$ と摂動 ϕ' に分離する。

$$
\phi = \bar{\phi} + \phi' \tag{1.4}
$$

ϕ' のスケールは Equation 1.3 から

$$
\phi' \sim fVL
$$

となる。これを地衡風スケーリングという。

Equation 1.4 を用いるとジオポテンシャルの摂動に対する連続の式は次のようになる。

$$
\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\phi' + \phi'\nabla\cdot\mathbf{V} + \bar{\phi}\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{1.5}
$$

Equation 1.5 のスケーリングは以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi'}{\partial t} &\sim fV^2 \sim R_o F\bar{\phi}\frac{V}{L} \\
\mathbf{V}\cdot\nabla\phi' &\sim fV^2 \sim R_o F\bar{\phi}\frac{V}{L} \\
\phi'\nabla\cdot\mathbf{V} &\sim fV^2 \sim R_o F\bar{\phi}\frac{V}{L} \\
\bar{\phi}\nabla\cdot\mathbf{V} &\sim \bar{\phi}\frac{V}{L}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
F = \frac{f^2L^2}{\bar{\phi}} = \frac{L^2}{L_R^2} \tag{1.6}
$$

は回転 Froude 数で、$L_R = \bar{\phi}^{1/2}/f$ をロスビーの変形半径である。

R_o のオーダーの項を無視すると運動方程式は

$$\nabla\phi + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0$$

となる。$F \leq 1$ のとき連続の式の第一近似は

$$\bar{\phi}\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

となる。

第 2 章

準地衡方程式系と鉛直循環

この講義では，準地衡風方程式系における鉛直循環について学ぶ。簡潔に表記される気圧に基づく鉛直座標を用いる。

2.1 気圧座標

一般化された鉛直座標（Appendix B）で $s = p$ とすると，p 座標における支配方程式系は次のように書ける。

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} = -g\nabla z$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla + \omega\frac{\partial}{\partial p},\ \omega \equiv \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

静力学平衡

$$g\frac{\partial z}{\partial p} = -\alpha,\ \alpha \equiv \frac{1}{\rho}$$

連続の式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

熱力学の式

$$\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{Q}}{c_pT} \tag{2.2}$$

2.2　準地衡風方程式系

β 平面近似

$$f = f_0 + \beta y,\ \beta \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$$

地衡風

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{g}} &= -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v_{\mathrm{g}} &= \frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

ラグランジュ微分とオイラー微分との関係

$$\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{\mathrm{g}}\frac{\partial}{\partial x} + v_{\mathrm{g}}\frac{\partial}{\partial y}$$

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{g}} u_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} = f_0 v_{\mathrm{a}} + \beta y v_{\mathrm{g}} \tag{2.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{g}} v_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} = -f_0 u_{\mathrm{a}} - \beta y u_{\mathrm{g}} \tag{2.5}$$

Equation 2.5 を x で微分したものから，Equation 2.4 を y で微分したものを引くと，渦度方程式

$$\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{g}}\zeta_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} + \beta v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t}(f + \zeta_{\mathrm{g}}) = f_0\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

が得られる。ここで準地衡渦度 ζ_{g} は

$$\zeta_{\mathrm{g}} \equiv \frac{\partial v_{\mathrm{g}}}{\partial x} - \frac{\partial u_{\mathrm{g}}}{\partial y} = \frac{1}{f_0}\nabla^2\phi \tag{2.6}$$

と定義される。

静力学平衡

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \tag{2.7}$$

連続の式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}} = 0 \tag{2.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} + \frac{\partial \omega}{p} = 0 \tag{2.9}$$

熱力学の式

$$\frac{\mathrm{d_g}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega \frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}p} = \frac{\theta_0}{c_p T_0}\dot{Q}$$

ここで θ は，基本場 $\theta_0(p)$ からのずれで，偏差を示す $'$ は省略する。

$$\theta_{\mathrm{total}}(x, y, p, t) = \theta_0(p) + \theta(x, y, p, t)$$

熱力学の式は気温 T を使って

$$\frac{\mathrm{d_g}T}{\mathrm{d}t} - \frac{p}{R} S_0 \omega = \frac{\dot{Q}}{c_p} \tag{2.10}$$

と表すこともできる。ここで

$$S_0 \equiv -\frac{\alpha_0}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}p}$$

は，基本場の安定度を示す。また，Equation 2.7 を用いると

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) + S_0 \omega = -\frac{R\dot{Q}}{c_p p} \tag{2.11}$$

と書ける。

2.3　ω 方程式

準地衡風方程式系における鉛直循環を診断する古典的な ω 方程式を導出する。簡単のため，f 平面（$f = f_0$）上で断熱（非断熱加熱 $\dot{Q} = 0$）の場合を考える。渦度方程式 Equation 2.6 を f_0 倍して p で微分したものから，熱力学方程式 Equation 2.11 に ∇^2 を作用させたものを引くと

$$\left(S_0\nabla^2 + f_0^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega = F_1 + F_2$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_0\frac{\partial}{\partial p}\left(u_\mathrm{g}\frac{\partial}{\partial x} + v_\mathrm{g}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f + \zeta_\mathrm{g}) \\
F_2 &= \nabla^2\left(u_\mathrm{g}\frac{\partial}{\partial x} + v_\mathrm{g}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)
\end{aligned}$$

である。F_1 は絶対渦度の移流の高度変化を表し，差分渦度移流（differential vorticity advection）と呼ばれる。F_2 は，温度移流の ∇^2 に比例する。両者には異符号の共通項があり相殺するため，必ずしも適切な解釈ができるとは限らない。

2.4　Q ベクトル

以下のように温度風平衡から導出すると，鉛直流 ω を駆動する強制項を簡潔に表現することができ，古典的な ω 方程式に比べて明瞭な解釈が可能である。

2.4.1　Q ベクトルの導出

f 平面（$f = f_0$）上で断熱（非断熱加熱 $\dot{Q} = 0$）のとき運動方程式 Equation 2.4, Equation 2.5 は

$$\frac{\mathrm{d_g}u_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} = f_0 v_\mathrm{a},\quad \frac{\mathrm{d_g}v_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} = -f_0 u_\mathrm{a}$$

となる。Equation 2.3 の右辺を p で微分し，静力学平衡 Equation 2.7 を用いると温度風平衡

$$f_0\frac{\partial u_\mathrm{g}}{\partial p} = \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.12}$$

$$f_0 \frac{\partial v_{\mathrm{g}}}{\partial p} = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.13}$$

が得られる。Equation 2.12 の右辺のラグランジュ微分（$\mathrm{d}_g/\mathrm{d}t$）をとると

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = S_0 \frac{\partial \omega}{\partial y} + Q_y \tag{2.14}$$

となる。ここで，

$$Q_y \equiv -\frac{R}{p}\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}}{\partial y} \cdot \nabla T \tag{2.15}$$

である。Equation 2.12 の左辺をラグランジュ微分し，Equation 2.12，Equation 2.13 を用いると

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(f_0 \frac{\partial u_{\mathrm{g}}}{\partial p}\right) = f_0^2 \frac{\partial v_{\mathrm{a}}}{\partial p} - Q_y \tag{2.16}$$

となる。Equation 2.14，Equation 2.16 より，

$$S_0 \frac{\partial \omega}{\partial y} - f_0^2 \frac{\partial v_{\mathrm{a}}}{\partial p} = -2Q_y \tag{2.17}$$

が得られる。同様に Equation 2.12 のラグランジュ微分から，

$$S_0 \frac{\partial \omega}{\partial x} - f_0^2 \frac{\partial u_{\mathrm{a}}}{\partial p} = -2Q_x \tag{2.18}$$

$$Q_x \equiv -\frac{R}{p}\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}}{\partial x} \cdot \nabla T \tag{2.19}$$

を得る。Equation 2.17 を y，Equation 2.18 を x で微分して加え, 連続の式 Equation 2.9 を用いると ω に関する診断の式

$$\left(S_0 \nabla^2 + f_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega = -2\nabla \cdot \boldsymbol{Q} \tag{2.20}$$

を得る。ここで $\boldsymbol{Q} \equiv (Q_x, Q_y)$ は Q ベクトルと呼ばれる (Hoskins et al. 1978) 。

2.4.2　非地衡風成分の役割

準地衡風方程式系における非地衡風成分の役割について考えよう。非地衡風成分がないとき，Equation 2.14 は地衡風成分のみで強制された気温傾度の時間変化

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\right)=Q_y$$

Equation 2.16 は鉛直シアの変化

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(f_0\frac{\partial u_\mathrm{g}}{\partial p}\right)=-Q_y$$

を表す。これらは大きさが同じで符号が反対なので，温度風平衡を壊すように働いている。つまり，温度風平衡は非地衡風成分による鉛直循環により維持されている。

2.4.3　Q ベクトルの見方

高度場や気温の分布が与えられたときに，Q ベクトルがどのようになるか理解するため，簡単な場合について考えてみよう (Sanders and Hoskins 1990) 。Equation 2.15 及び Equation 2.19 で等温線と平行に x 軸をとると $\partial T/\partial x = 0$ となるので

$$\boldsymbol{Q}=-\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\partial v_\mathrm{g}}{\partial x},-\frac{\partial u_\mathrm{g}}{\partial x}\right)=-\frac{R}{p}\left|\frac{\partial T}{\partial y}\right|\left(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}_\mathrm{g}}{\partial x}\right) \tag{2.21}$$

と変形することができる。すなわち，$\boldsymbol{Q}$ は左手が寒気となるようにとった x 軸方向に沿う地衡風ベクトルの変化（$\partial\boldsymbol{v}_\mathrm{g}/\partial x$）を 90° 時計回りに回転（$-\boldsymbol{k}\times$ したものに比例（$R/p|\partial T/\partial y|$）する。

Q ベクトルの性質をまとめると以下の通りである。

- Q ベクトルは，収束域で上昇流，発散域で下降流を強制する Equation 2.20。
- Q ベクトルは，北風から南風に変わる低気圧の中心では東向き（温度風の向き），南から北風に変わる高気圧の中心では西向き（温度風と反対向き）となり，低気圧の前面で上昇流，後面で下降流を強制する。
- 等温線と等高線が平行で温度移流のない場合でも，風向きが北西から南西に変わる谷（トラフ）で Q ベクトルは東向きとなり，低気圧の前面に上昇流を強制する。
- 北風と南風とが合流する前線形成場では，東ほど風が強くなるため，Q ベクトルは南向きとなり，前線の南の温暖域で上昇流を強制する。

- 暖気に向いた Q ベクトルは前線形成，等温線と平行な Q ベクトルは不活発，寒気に向いた Q ベクトルは前線消滅を示す。

連続の式を用いずに Equation 2.21 を

$$\boldsymbol{Q} = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\partial v_{\mathrm{g}}}{\partial x}, \frac{\partial v_{\mathrm{g}}}{\partial y}\right) \tag{2.22}$$

と表すと，v_{g} のシアーのみで Q ベクトルが決まる（Equation 2.22)。$\partial v_{\mathrm{g}}/\partial x$ は北風最大の西で負，東で正，$\partial v_{\mathrm{g}}/\partial y$ は北風最大の北で正，南でなので，北風最大の周りで Q ベクトルは発散する。

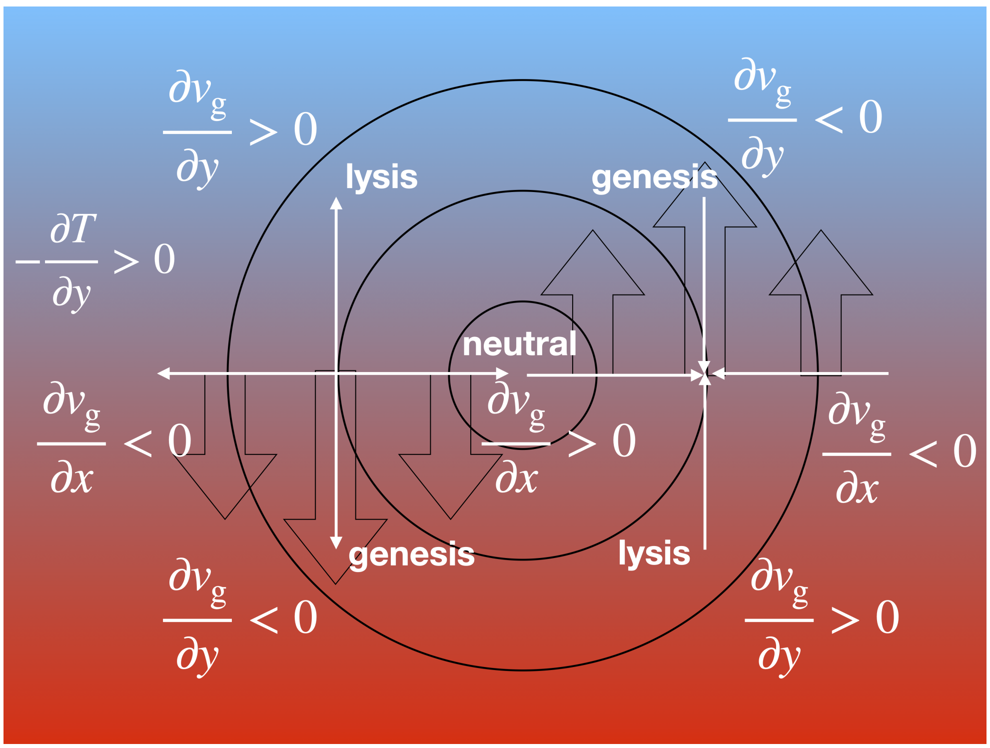

Figure2.1: 南北温度傾度のみ場合の場における低気圧に伴う Q ベクトル (Enomoto 2019)

2.5　実際の例

NCEP/NCAR 再解析 (Kalnay et al. 1996) を用いて行なった Q ベクトル解析の例を示す。

2.5.1　北米東岸の低気圧

1975 年 11 月 10 日 0 UTC，北米東岸の低気圧 (Hoskins and Pedder 1980) の例では，700 hPa 面の谷の後面（西側）に寒気がある）。これに対応して，下降流とこれに対応する Q ベクトルの発散が見られる。低気圧の前面では，Q ベクトルが収束している。これよりも弱いが，寒冷前線でも Q ベクトルが見られる。等温線を横切っているので，前線形成が示唆される。一方，温暖前線では Q ベクトルは等温線に平行であり重要でないことが分る。

2.5.2　西日本豪雨

2018 年 6 月下旬から 7 月上旬にかけて，台風や梅雨前線の影響により，西日本の広い範囲で記録的な降水量を観測し，各地で水害や土砂災害を引き起こした。気象庁が「平成 30 年 7 月豪雨」と命名したこの現象は「西日本豪雨」として知られている。降水量のピークは 7 月 6 日であったが，これに先行する 7 月 4 日に台風第 7 号が日本海を北東進し温低化している。北風の極大から Q ベクトルが発散し，大陸から西日本に伸びる暖域に向かって収束している。したがって，台風は梅雨前線の強化に寄与したと考えられる (Enomoto 2019) 。

課題

1. Equation 2.4，Equation 2.5 から絶対渦度方程式 Equation 2.6 を導出せよ。
2. Equation 2.7 を用いて Equation 2.10 を $\partial\phi/\partial p$ で表し、Equation 2.11 を導出せよ。
3. 絶対渦度方程式と $\partial\phi/\partial p$ で表した熱力学の式から時間微分の項を消去して，ω 方程式を導き，Equation 2.20 と比較せよ。
4. 低気圧の事例を選んで Q ベクトルを描け。領域はどこでもよい。高度を変えるとどうなるか。参考: Python による気象データサイエンス梅雨前線

第 3 章

傾圧不安定

この講義では，Pedlosky (1987) に基づき偏西風帯上で発生する温帯低気圧のメカニズムである傾圧不安定について学ぶ。傾圧不安定において最も発達するモードが数千 km になることが示させる。温帯低気圧を総観規模擾乱とも呼ぶのは，水平スケールに由来している。

3.1 基礎方程式系

この節では安定性問題を取り扱うために便利な基礎方程式系を対数気圧座標で表し，準地衡風近似の下での渦位方程式を導出する。

3.1.1 対数気圧座標

傾圧不安定問題では，対数気圧座標

$$z^* = -H \ln \frac{p}{p_{\mathrm{ref}}}$$

を用いると便利である。ここで p_{ref} は参照気圧,

$$H = \frac{RT_{\mathrm{ref}}}{g}$$

は参照気温 T_{ref} を用いたスケールハイトである。

z^* は p のみの函数なので,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{z^*}, \ \nabla_p = \nabla_{z^*}$$

である。また

$$\frac{\partial}{\partial p} = -\frac{H}{p}\frac{\partial}{\partial z^*},$$
$$\omega = -\frac{p}{H}w^*,\ w^* \equiv \frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}t}$$

より，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla + w^*\frac{\partial}{\partial z^*}$$

となる。

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} = -g\nabla z$$

熱力学の式

$$\frac{\mathrm{d}\ln\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{Q}}{c_pT}$$

は p 座標の Equation 2.1, Equation 2.2 と同形である。

静力学平衡

$$\frac{\partial\phi}{\partial z^*} = \frac{RT}{H}$$

連続の式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} = 0 \tag{3.1}$$

は

$$\rho_0 \equiv \rho_{\mathrm{ref}}\exp\left(-\frac{z^*}{H}\right)$$

を用いると，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\rho_0 w^*)}{\partial z^*} = 0 \tag{3.2}$$

とも書ける。

3.1.2 準地衡渦位方程式

z^* 座標での運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d_g} u_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} = f_0 v_\mathrm{a} + \beta y v_\mathrm{g}$$

$$\frac{\mathrm{d_g} v_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} = -f_0 u_\mathrm{a} - \beta y u_\mathrm{g}$$

であり p 座標の Equation 2.4, Equation 2.5 と同形である。

非地衡風成分の連続の式は，p 座標系 Equation 2.8 の

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{g} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{a} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

及び Equation 3.2 より

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{a} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\rho_0 w^*)}{\partial z^*} = 0 \tag{3.3}$$

となる。

熱力学の式は，p 座標系における T で表した Equation 2.10

$$\frac{\mathrm{d_g} T}{\mathrm{d}t} - \frac{p}{R} S_0 \omega = \frac{\dot{Q}}{c_p}$$

より

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z^*}\right) + N^{*2} w^* = \frac{\kappa \dot{Q}}{H} \tag{3.4}$$

と書ける。ここで,

$$N^{*2} \equiv \frac{R}{H}\left(\frac{\partial T}{\partial z^*} + \frac{\kappa T}{H}\right) = \left(\frac{p}{H}\right)^2 S_0$$

$\kappa = R/c_p$ である。

∂Equation 2.5/$\partial x - \partial$Equation 2.4/∂y より，準地衡渦度方程式

$$\frac{\mathrm{d_g}\zeta_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} = \frac{f_0}{\rho_0}\frac{\partial(\rho_0 w^*)}{\partial z^*} - \beta v_g \tag{3.5}$$

が得られる。ここで連続の式 Equation 2.8，Equation 3.3 を用いた。

断熱（$\dot{Q} = 0$）のとき，Equation 3.5 と Equation 3.4 から w^* を消去すると，

$$\frac{\mathrm{d_g}q}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.6}$$

ここで q は，準地衡渦位

$$q = f_0 + \beta y + \nabla^2\psi + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\epsilon\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z^*}\right), \ \epsilon = \frac{f_0^2}{N^{*2}}$$

である。非粘性，断熱の場合，q は保存する。

3.2　線型安定性問題

準地衡流線函数 ψ を東西一様で定常な基本場と擾乱とに分ける。

$$\psi(x, y, z^*, t) = \overline{\psi}(y, z^*) + \psi'(x, y, z^*, t)$$

擾乱は微小 $\psi \ll 1$ であるとし，2 次の項は無視する。Equation 3.6 を線型化すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)q' + \frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

となる。ここで，基本場は

$$\overline{u} = \overline{u}(y, z^*)$$

のみとする。また，

$$q' = \nabla^2\psi' + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\epsilon\rho_0\frac{\partial\psi'}{\partial z^*}\right) \tag{3.8}$$

は渦位擾乱，

$$\frac{\partial\overline{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\epsilon\rho_0\frac{\partial\overline{u}}{\partial z^*}\right) \tag{3.9}$$

は基本場の南北渦位勾配である。

南北の境界 $y = \pm L$ で

$$v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0,\ \psi' = 0,$$

という側面境界条件を与える。上下端で $w^* = 0$ とし熱力学の式 Equation 3.4 より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi'}{\partial z^*} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial z^*}\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \tag{3.10}$$

が境界条件となる。

線型安定性問題では，無限小振幅の擾乱に対する基本場 $\overline{u}(y, z^*)$ の安定性を調べる。流れが不安定で擾乱が成長すると，最終的には非線型効果が無視できなくなる。流れが安定でも，有限振幅の擾乱に対しては不安定となる可能性がある。

3.2.1　不安定の必要条件

Equation 3.7 に $\rho_0\psi'$ をかけて空間積分すると，

$$\frac{\partial E'(\psi')}{\partial t} = \int\int \rho_0 \left[\overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \epsilon \overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z^*}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right] \mathrm{d}y\mathrm{d}z^*$$

となる。ここで

$$E'(\psi') = \int\int\ \frac{\rho_0}{2}\left[\overline{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y}\right)^2 + \epsilon\left(\frac{\partial \psi'}{\partial z^*}\right)^2}\right] \mathrm{d}y\mathrm{d}z^*$$

は擾乱の全エネルギーである。

右辺第 1 項は，レイノルズ応力 $-\rho_0\overline{v'u'}$ と基本東西風の南北シアとの積で擾乱のエネルギーが生じることを示す。この過程を順圧不安定（barotropic instability）と言う。$\partial\overline{u}/\partial y > 0$ のところでは，ψ' が北西から南東に傾けば擾乱は発達する。右辺第 2 項は，北向き温度フラックス $\overline{v'T'}$ と基本東西風の鉛直シア（南北温度傾度 $-\partial\overline{T}/\partial y$）との積に比例する擾乱のエネルギーが生ずることを示す。この過程を傾圧不安定（baroclinic instability）と言う。基本場から擾乱への傾圧エネルギー変換が正になるためには擾乱の軸は西に傾いていなければならない。

ところで，Equation 3.8 より南北渦位フラックスは

$$\rho_0\overline{v'q'} = \rho_0\frac{\partial}{\partial y}\overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\epsilon\rho_0\overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z^*}}\right) \tag{3.11}$$

と書ける。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\eta'=v'$$

で定義される南北変位 η' を用いると

$$q'=-\eta'\frac{\partial\overline{q}}{\partial y},$$
$$\overline{v'q'}=-\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\eta'^2}}{2}$$

となる。上下端では，Equation 3.10 より

$$\overline{\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial z^*}}=\frac{\partial\overline{u}}{\partial z^*}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\eta'^2}}{2}$$

となる。Equation 3.11 を子午面積分すると

$$\int\int\rho_0\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\eta'^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z^*-\int\epsilon\rho_0\frac{\partial\overline{u}}{\partial z^*}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\eta'^2}\mathrm{d}y\bigg|_{z^*=0}=0 \tag{3.12}$$

を得る。ここで，上下端での摩擦がないとき

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\rho_0\overline{u}\mathrm{d}y\mathrm{d}z^*=-\int\int\rho_0\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'u'}\mathrm{d}y\mathrm{d}z^*=0$$

であることを用い，$z^*\to\infty$ で $\eta'\to 0$ または $\partial\overline{u}/\partial z\to 0$ として上端での南北温度フラックスの寄与を無視した。擾乱が成長する（$\partial\overline{\eta'^2}/\partial t>0$）とき，Equation 3.12 が成り立つためには，以下のいずれか満たさなければならない。

- $z^*=0$ で $\partial\overline{u}/\partial z^*=0$，即ち下端で南北温度傾度がないとき，$\partial\overline{q}/\partial y$ は符号を変えなければならない（Rayleigh の必要条件）。
- $\partial\overline{q}/\partial y\geq 0$ がどこでも成り立つとき，下端のどこかで $\partial\overline{u}/\partial z^*>0$ でなければならない。
- $\partial\overline{u}/\partial z^*<0$ がどこでも成り立つとき，どこかで $\partial\overline{q}/\partial y<0$ でなければならない。

Equation 3.9 は

$$\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}=\beta-\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y}-\epsilon\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^{*2}}+\frac{\epsilon}{H}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z^*}-\frac{\partial\epsilon}{\partial z^*}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z^*}$$

と書ける。$\beta>0$ なので $\partial\overline{q}/\partial y<0$ となるのは，曲率の大きなところである。ジェットは大きな南北シアを伴うことがあり，順圧不安定を起こすことがある。中緯度における傾圧

不安定は，通常 $\partial\overline{q}/\partial y > 0$ で下端に西風シア $\partial\overline{u}/\partial z^* > 0$（南北温度傾度）を伴うところで生ずる。

3.2.2 Eady 問題

Eady (1949) は以下のような仮定をおいて，線型安定性問題を解いた。

- 基本場の密度一定（Boussinesq 近似）
- f 平面（$\beta = 0$）
- 鉛直シア一定 ($\overline{u} = \Lambda z^*$)
- $z^* = 0$ と $z^* = H$ は平坦な剛体底・天井 (rigid lid)。

この仮定の下では，擾乱の渦位方程式 Equation 3.7 は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda z^* \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\psi' + \epsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^{*2}}\right) = 0, \tag{3.13}$$

境界条件は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda z^* \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial z^*} - \Lambda\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0 \tag{3.14}$$

である。

ここで波動解

$$\psi' = \Re\Psi(z^*)\exp[i(kx + ly - kct)]$$

を仮定すると Equation 3.13 は

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^{*2}} - \mu^2\right)\Psi = 0,\ \mu^2 \equiv \frac{k^2 + l^2}{\epsilon} \tag{3.15}$$

Equation 3.14 は

$$(\Lambda z - c)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z^*} - \Lambda\Psi = 0,\ z^* = 0, H \tag{3.16}$$

となる。

Equation 3.16 の一般解は

$$\Psi(z^*) = a\cosh\mu z^* + b\sinh\mu z^* \tag{3.17}$$

と書ける。これを z^* で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z^*} = a\mu \sinh \mu z^* + b\mu \cosh \mu z^* \tag{3.18}$$

となる。Equation 3.17，Equation 3.18 を用いると，Equation 3.15 は

$$\begin{pmatrix} \Lambda & c\mu \\ (\Lambda H - c)\mu \sinh(\mu H) - \Lambda \cosh(\mu H) & (\Lambda H - c)\mu \cosh(\mu H) - \Lambda \sinh(\mu H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{3.19}$$

と書ける。非自明解は

$$c^2 - \Lambda H c + \frac{\Lambda^2 H}{\mu} \coth(\mu H) - \frac{\Lambda^2}{\mu^2} = 0$$

の解で

$$c = \frac{\Lambda H}{2} \pm \frac{\Lambda}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\mu H}{2} - \tanh \frac{\mu H}{2}\right)\left(\frac{\mu H}{2} - \coth \frac{\mu H}{2}\right)} \tag{3.20}$$

となる。Equation 3.20 を求める際

$$\coth x = \frac{1}{2}\left(\tanh \frac{x}{2} + \coth \frac{x}{2}\right)$$

を用いた。$\mu H/2 \geq \tanh(\mu H/2)$ なので，$\mu H/2 > \coth(\mu H/2)$ のとき，二つの解はともに実数である。μH が大きくなると二つの解は，底と天井の風速に漸近する（Figure 3.1）。

```r
calc.c <- function(mu){
  ifelse(mu == 0,
    sqrt(-1/12 + 0i),
    {
      muh <- mu * 0.5
      tanh.muh <- tanh(muh)
      coth.muh <- 1 / tanh.muh
      sqrt((muh - coth.muh) * (muh - tanh.muh) + 0i) / mu}
  )
}

mu <- seq(0, 9, length.out = 101)
c.z <- calc.c(mu)
```

```
c.i <- Im(c.z)
c.r1 <- 0.5 + Re(c.z)
c.r2 <- 0.5 - Re(c.z)
par(mfrow = c(2, 1), mar = c(2, 4, 2, 2))
plot(mu, c.i, type = "l", lwd = 2, xlab = "μ H")
plot(mu, c.r1, type = "l", lwd = 2, ylim = c(0, 1),
     xlab = "μ H", ylab = "c.r")
lines(mu, c.r2, lwd = 2)
```

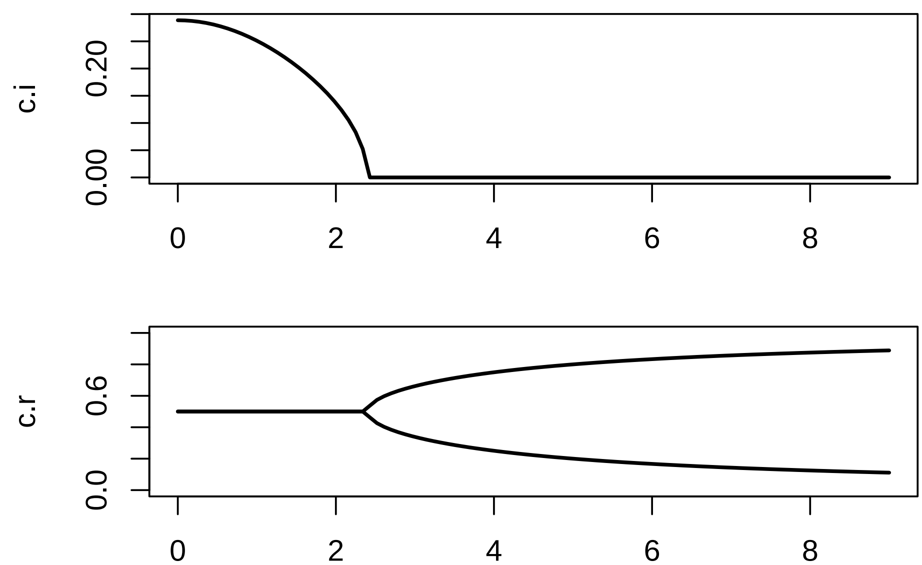

Figure3.1: c の虚部 c_{i}（上）と実部 c_{r}（下）。横軸は μH

虚部が現れる臨界値は $\mu_{\mathrm{c}}H/2 = \coth(\mu_{\mathrm{c}}H/2)$ より

$$\mu_{\mathrm{c}}H \approx 2.3994 \tag{3.21}$$

で，$\mu < \mu_{\mathrm{c}}$ のとき波は発達する（Figure 3.1）。

$l = 0$ のとき

$$\frac{\Lambda}{\mu} = \frac{\Lambda f_0}{kN^*}$$

なので，成長率は

$$kc_{\mathrm{i}} = \frac{\Lambda f_0}{N} \sqrt{\left(\frac{\mu H}{2} - \tanh\frac{\mu H}{2}\right)\left(\frac{\mu H}{2} - \coth\frac{\mu H}{2}\right)} \tag{3.22}$$

となる。Equation 6.3 が最大になる波数は

$$\mu H = k_{\mathrm{m}}\frac{N^* H}{f_0} \approx 1.6061 \tag{3.23}$$

で，このときの成長率は

$$k_{\mathrm{m}} c_{\mathrm{i}} \frac{N^*}{\Lambda f_0} \approx 0.30982$$

Equation 3.23 は，Rossby の変形半径を $NH/f \approx 10^6$ とすると，約 4000 km となる。成長率は，およそ 1 day^{-1} である（Figure 3.2）。

```
calc.mu <- function(k, n = 0, S = 0.25) {
  sqrt((k^2 + ((n + 0.5) * pi)^2) * S)
}

k <- seq(0, 5, length.out = 101)
kci <- k * Im(calc.c(calc.mu(k)))
plot(k, kci, type = "l", lwd = 2)
```

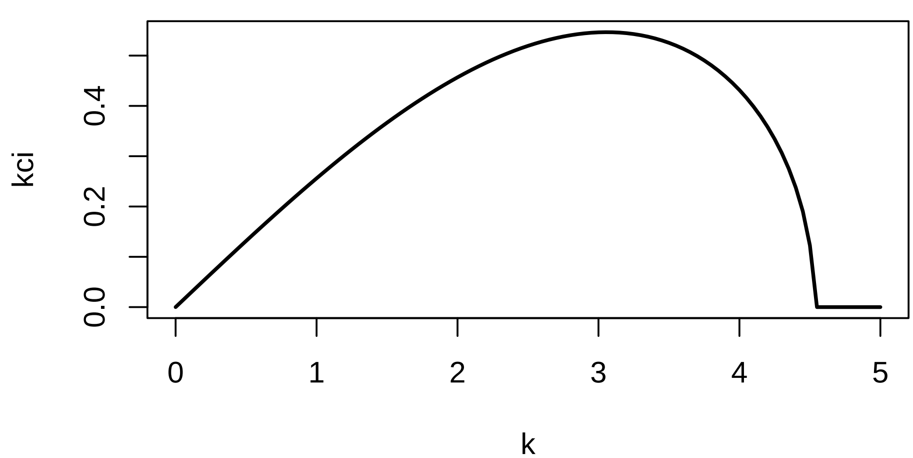

Figure3.2: 成長率 kc_{i} の波数 k 依存性。

Equation 3.19 より $b = -\Lambda a/\mu c$ なので

$$
\begin{aligned}
\Psi(z^*) &= \cosh(\mu z^*) - \frac{\Lambda}{\mu c}\sinh(\mu z^*) \\
&= \left(\cosh(\mu z^*) - \frac{\Lambda c_\mathrm{r}}{\mu |c|^2}\sinh(\mu z^*)\right) + i\frac{\Lambda c_\mathrm{i}}{\mu |c|^2}\sinh(\mu z^*)
\end{aligned}
$$

となる。ここで

$$
\frac{1}{c} = \frac{1}{c_\mathrm{r} + ic_\mathrm{i}} = \frac{c_\mathrm{r} - ic_\mathrm{i}}{|c|^2}
$$

を用いた。線型論では，擾乱の振幅は求まらないことに注意する。ψ' は

$$
\begin{aligned}
\psi' &= \Re \exp(kc_\mathrm{i}t)\cos(ly)\Psi(z^*)\exp[ik(x - c_\mathrm{r}t)] \\
&= \exp(kc_\mathrm{i}t))|\Psi(z^*)|\cos(ly)\cos[kx + \alpha(z^*) - kc_\mathrm{r}t]
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

と書ける。ここで

$$
|\Psi(z)|^2 = \left(\cosh(\mu z^*) - \frac{\Lambda c_\mathrm{r}}{\mu |c|^2}\sinh(\mu z^*)\right)^2 + \frac{\Lambda^2 c_\mathrm{i}^2}{\mu^2 |c|^4}\sinh^2(\mu z^*)
\tag{3.25}
$$

$$
\tan\alpha(z^*) = \frac{\Lambda c_\mathrm{i}}{\mu |c|^2 \coth(\mu z^*) - \Lambda c_\mathrm{r}}
\tag{3.26}
$$

である。

$$
x = -\frac{\alpha(z^*)}{k} + \mathrm{const}
$$

となるので，等位相線は西に傾くことが分る（Figure 3.3)。

```
k <- 3.1277
mu <- calc.mu(k)
z <- seq(0, 1, length.out = 101)
muz <- mu * z
c.z <- calc.c(mu)
c.r <- 0.5
c.i <- Im(c.z)
muc.2 <- mu * (c.r^2 + c.i^2)
x <- cosh(muz) - 0.5 * sinh(muz) / muc.2
y <- c.i * sinh(muz) / muc.2
```

```
phi <- sqrt(x^2 + y^2)
alpha <- atan2(y, x)

plot(phi, z, type = "l", xlim = c(0, pi / 2), lwd = 2, xlab = "|Φ|, arg Φ")
lines(alpha, z, lwd = 2, col = "blue")
legend("topleft", c("|Φ|", "arg Φ"), lwd = 2, col = c("black", "blue"))
```

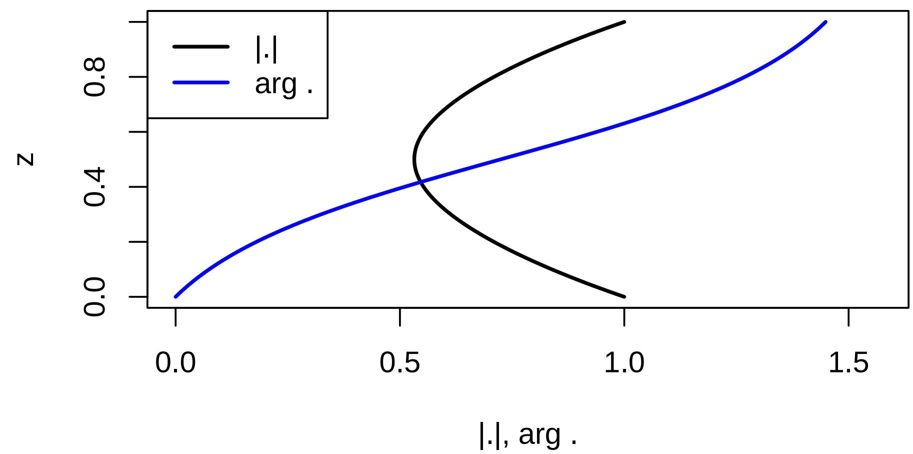

Figure3.3: 正規化された振幅 $|\Phi|$ と位相 $\arg\Phi$ の鉛直分布。

Equation 3.24 を x, y, z で微分し，運動量及び熱フラックスを計算する。u' と v' は 90° 位相がずれているので，

$$\rho_0 \overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}} = 0 \tag{3.27}$$

である。熱フラックスは

$$\rho_0 \overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial z^*}} = \rho_0 \exp(2kc_\mathrm{i}t)\frac{|\Psi(z^*)|^2}{2}k\frac{\partial \alpha(z^*)}{\partial z^*}\cos^2(ly) \tag{3.28}$$

と書ける。$\partial\alpha/\partial z^*$ は正なので，熱フラックスは北向きで，基本場の温度傾度と逆方向である。Equation 3.25 と Equation 3.26 を用いると，熱フラックスは高さに依存しないことを示すことができる。Eady 問題では $\partial\overline{q}/\partial y = 0$ なので，渦位フラックス

$$\overline{v'q'} = 0$$

である。

課題

1. Equation 3.21 の $\mu_c H \approx 2.3994$ を数値的に求めよ。

```
uniroot(function(mu){1 / tanh(0.5 * mu) - 0.5 * mu}, c(1, 3))$root
```

```
[1] 2.399341
```

2. Equation 3.27，Equation 3.28 を示せ。

第 4 章

渦度と循環

Pedlosky (1987) に基づいて渦度について学ぶ。

4.1 渦度

渦度ベクトルは速度の回転として定義される。

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$$

デカルト座標で書き下すと

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\
\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\
\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

流れが閉じてなくても，シアーがあれば渦度があることに注意。

4.1.1 例題 剛体回転

角速度 $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathrm{const}$ の剛体回転を考える。

1. $\boldsymbol{r}$ における速度 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{r}$
2. $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_{0x}\boldsymbol{i} + \Omega_{0y}\boldsymbol{j} + \Omega_{0z}\boldsymbol{k}$ とすると $u = \Omega_{0y}z - \Omega_{0z}y, v = \Omega_{0z}x - \Omega_{0x}z, w = \Omega_{0x}y - \Omega_{0y}x$
3. $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0\boldsymbol{k}$ のとき $u = -\Omega_0 y, v = \Omega_0 x, w = 0$ $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \Omega_0 + \Omega_0 = 2\Omega_0$

4. 一般に $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}_0$

ベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$$

で $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{r}$ とおくと，$\boldsymbol{\omega}$ は定ベクトル $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ を用いて

$$\begin{aligned}\nabla \times (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{r}) &= (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega}_0 - (\boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}_0(\nabla \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}_0) \\ &= 0 - \boldsymbol{\Omega}_0 + 3\boldsymbol{\Omega}_0 = 2\boldsymbol{\Omega}_0\end{aligned}$$

4.1.2　絶対渦度

非回転系からみた渦度

$$\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{2}$$

を絶対渦度という。絶対渦度は相対渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ と惑星渦度 $2\boldsymbol{\Omega}$ との和である。惑星渦度の地表面に垂直な成分

$$f = 2\Omega \sin \phi$$

をコリオリパラメタという。

4.1.3　ロスビー数

ロスビー数は移流項とコリオリ項との比として定義されるが，相対渦度の鉛直成分とコリオリパラメタとの比でもある。

$$\omega_n = \mathcal{O}\left(\frac{U}{L}\right)$$

$$\frac{\omega_n}{f} = \frac{U}{fL} = \frac{U}{2\Omega L \sin \phi} = \frac{R_o}{\sin \phi}$$

中高緯度のゆっくりとした大規模運動はロスビー数が小さく，渦を伴っており，相対渦度が絶対渦度に比べて小さい。

4.1.4 例題渦度は非発散

渦度を速度 $\boldsymbol{u}$ で表し，ベクトル解析の公式

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$

を用いると

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{u} = 0$$

4.1.5 渦線・渦管・渦糸

渦線 vortex line 線上の各点で接線が渦度ベクトルの向きに一致
渦管 vortex tube 閉曲線 C を通る渦線によって作られる管
渦糸 vortex filnament 断面積が無限小の渦管に含まれる流体

渦管を横切る成分の渦度はない。また渦度は非発散なので

$$\iiint_V \mathrm{d}V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a = \iint_A \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A = 0 \tag{4.1}$$

$\boldsymbol{n}$ は外向き法線で，Gauss の発散定理を用いた。

4.1.6 渦管の強さ

渦管の強さを

$$\boldsymbol{\Gamma}_a \equiv \iint \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A$$

で定義する。円柱状の渦管の入口を A'，出口を $\boldsymbol{n}_A$ とすると，$\boldsymbol{n}_{A'} = -\boldsymbol{n}'_A$ なので，Equation 4.1 より

$$\iint_A \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n}_A \mathrm{d}A + \iint_{A'} \boldsymbol{\omega}_a \cdot (-\boldsymbol{n}_{A'}) \mathrm{d}A = 0$$

$$\iint_A \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n}_A \mathrm{d}A = \iint_{A'} \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n}_{A'} \mathrm{d}A$$

従って $\boldsymbol{n}$ の向き $\boldsymbol{\Gamma}_a$ は渦管に沿って一定である。

4.2　循環

ストークスの定理より渦管の強さは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_a &= \iint \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A = \oint_C \boldsymbol{u}_\mathrm{I} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{\Gamma} &= \iint \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A = \oint_C \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

と速度を閉曲線 C に沿って積分した値，循環で表すことができる。すなわち循環は渦管の強さを表す。

4.2.1　循環の時間発展

$$
\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_C \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}
$$

右辺第 2 項

$$
\oint_C \boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \oint_C \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2} \oint_C \mathrm{d}|\boldsymbol{u}|^2 = 0
$$

運動方程式を C に沿って線積分 $\oint_C \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ すると

$$
\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = -\oint_C (2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_C \frac{\boldsymbol{F}}{\rho} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}
$$

4.2.2　循環の時間発展: コリオリ力

北半球 $\boldsymbol{\Omega} > 0$ で閉曲線 C から発散しているとき $-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の進行方向に対して右向きなので循環を弱める。

$$
\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} < 0
$$

4.2.3　循環の時間発展: 気圧傾度力

一様な上向きの $-\nabla p$ に対して、軽い右側の流体が重い左側の流体よりも浮力 $-\nabla p/\rho$ 大

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} > 0$$

$$\begin{aligned} & -\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ & = -\iint_A \nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A \\ & = \iint_A \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \rho \times \nabla p = 0 \text{ 順圧} \\ \nabla \rho \times \nabla p \neq 0 \text{ 傾圧} \end{aligned}$$

4.2.4　循環の時間発展: 摩擦力

$$\boldsymbol{F}/\rho = \nu \nabla^2 \boldsymbol{u},\ \nu \equiv \mu/\rho$$

$$\nu \oint_C \nabla^2 \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\nu \oint_C (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

$\omega_x = \omega_y = 0$ で ω_z が内部ほど大

$$-\nu (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\nu \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \mathrm{d}x$$

$\frac{\partial \omega_z}{\partial y} > 0$ なので $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} < 0$

4.2.5　Kelvin の定理

非回転系の運動方程式を閉曲線 C に沿って積分

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_a}{\mathrm{d}t} = -\oint_C \frac{\nabla p}{\rho}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_C \frac{\boldsymbol{F}}{\rho}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

流体が C 上で (1) 順圧で (2)$\boldsymbol{F}=0$ のとき Γ_a は保存。

- $\Gamma_a = \Gamma + 2\Omega A_n$: Γ が増加（減少）すると $2\Omega A_n$ が減少（増加）
- $\Gamma_a = \iint_A \boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A$: 渦管が細く（太く）なると $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}$ が増大（減少）
- Kelvin の定理が成立: 渦管（極限としての渦糸）は流体と共に移動
- 粘性は渦糸を拡散し、傾圧効果は渦糸を生成

4.3　渦度方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho\times\nabla p) + \nabla\times\frac{\boldsymbol{F}}{\rho}$$

1. シアーによる生成 $\omega_x = \omega_\mathrm{a}\frac{\partial u}{\partial z}$
2. 渦管の収束による生成 $\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} = \omega_\mathrm{a}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$
3. 傾圧効果による生成
4. 粘性による拡散

第 5 章

渦位

5.1 順圧渦位

浅水波方程式系，摩擦なしで保存する (Rossby 1940)。

$$P = \frac{f+\zeta}{h}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + (f+\zeta)\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0\\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0\end{aligned}$$

から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f+\zeta}{h}\right)$$

が得られる。

二つの等温位面の厚さを

$$\Delta \equiv -\frac{\delta p}{g}$$

とすると

$$P = \frac{f+\zeta_\theta}{\Delta}$$

と書ける。

5.2 傾圧渦位

[Ertel (1942a);Ertel (1942b);Ertel (1942c);Ertel (1942d)](英訳 Schubert et al. 2004) は次の傾圧渦位を導出した。

$$P = \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a}{\mathrm{d}t} &= (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\omega}_a \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho \times \nabla p) + \nabla \times \frac{\boldsymbol{F}}{\rho} \\ \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= -\rho\nabla \cdot \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho^3}(\nabla\rho \times \nabla p) + \frac{1}{\rho}\nabla \times \frac{\boldsymbol{F}}{\rho} \tag{5.1}$$

$\nabla\theta$ と Equation 5.1 との内積

$$\nabla\theta \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right) = \nabla\theta \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u} + \nabla\theta \cdot \frac{1}{\rho^3}(\nabla\rho \times \nabla p) + \frac{\nabla\theta}{\rho} \cdot \nabla \times \frac{\boldsymbol{F}}{\rho}$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\theta = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \left[\left(\frac{\omega_a}{\rho} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}\right] \cdot \nabla\theta$$

を用いると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\theta\right] = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\right)\frac{Q}{\Pi} + \nabla\theta \cdot \frac{1}{\rho^3}(\nabla\rho \times \nabla p) + \frac{\nabla\theta}{\rho} \cdot \nabla \times \frac{\boldsymbol{F}}{\rho}$$

が得られる。

傾圧渦位

$$P = \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\theta \tag{5.2}$$

は以下の条件で保存

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0$$

1. 非断熱加熱なし（$Q = 0$），つまり θ が保存
2. 摩擦なし（$\nabla F = 0$）
3. 順圧 $\nabla\rho \times \nabla p = 0$ または $\theta = \theta(\rho, p)$

5.3 等圧面渦位

静力学平衡を仮定すると p 座標の「密度」は

$$m = \rho \frac{\partial z}{\partial p} = -1/g$$

と表されるので等圧面渦位は

$$P = -g\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta$$

と表される。

5.4 等温位面渦位

等温位座標の気圧傾度力を求める。温位 $\theta \equiv T\big(p/p_p\big)^{-\kappa}$ の対数微分

$$\nabla_\theta \ln\theta = \nabla_\theta \ln T - \frac{R}{c_p}\nabla_\theta \ln p = 0$$

より

$$\frac{1}{\rho}\nabla_\theta p = \nabla_\theta c_p T$$

と書ける。したがって気圧傾度力は

$$-\frac{1}{\rho}\nabla_z p = -\frac{1}{\rho}\nabla_\theta p - g\nabla_\theta z = -\nabla_\theta M$$

ここで

$$M \equiv c_p T + gz$$

は Montgomery 流線函数である。

運動方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla_\theta \left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + M\right) + (f + \zeta_\theta)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \theta}$$

に $\boldsymbol{k} \cdot \nabla_\theta \times$ を作用させると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + (f + \zeta_\theta)\nabla_\theta \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \cdot \nabla_\theta \times \left(\boldsymbol{F} - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \theta}\right) \tag{5.3}$$

が得られる。ここで $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_\theta$ である。

連続の式

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\nabla_\theta \cdot \boldsymbol{v} = -\dot{\theta}\frac{\partial m}{\partial \theta} - m\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}$$

を用いて渦度方程式 Equation 5.3 から $\nabla_\theta \cdot \boldsymbol{v}$ を消去すると

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{m}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{m}\boldsymbol{k} \cdot \nabla_\theta \times \left(\boldsymbol{F} - \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \theta}\right)$$

$$P \equiv \frac{f + \zeta_\theta}{m}$$

は断熱 $\dot{\theta} = 0$，摩擦なし $\boldsymbol{F} = 0$ のときに保存する。

静力学平衡 $m = -g^{-1}\,\partial p/\partial \theta$ を仮定すると

$$P = -g\frac{f + \zeta_\theta}{\partial p/\partial \theta}$$

を得る。

摩擦がないとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A \boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A = \iint_A \left(\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}\right) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}A$$

等温位面では右辺 $= 0$。A の境界 C で Kelvin の定理が成り立つ。

微小領域 δA で

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{n}\delta A\right) = 0$$

θ と $\theta - \delta\theta$ で挟まれた微小な柱

$$\delta m = \rho \delta A \delta \ell = \rho \delta A \frac{\delta\theta}{|\nabla\theta|}$$

を考える。

$$\delta A = \frac{\delta m}{\rho} \frac{|\nabla\theta|}{\delta\theta}$$

$\delta\theta = |\nabla\theta| \boldsymbol{n}$ なので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\theta}{\rho} \frac{\delta m}{\delta\theta}\right) = 0$$

$\delta m, \delta\theta$ は共に定数なので，Equation 5.2 は保存する。

第 6 章

最適励起

順圧不安定あるいは傾圧不安定な背景場における摂動の発生及び発達を理解することは気象力学の重要な目的である。{#sec-eady}では、線型化された方程式の指数函数的に発達するモードの存在が不安定の要因であることを示した。これは Rayleigh (1880) 以来のノーマルモードの考え方で、時刻 $t \to \infty$ での極限での不安定である。以下に示すように、安定または中立な場においても、摂動は有限時間では形状を変えながら発達する。このような摂動の非モード成長は、観測事実とも整合する。有限時間内に最大成長する初期摂動を最適励起摂動という。ここでは、Farrell and Ioannou (1996) に基づいて、最適励起を含めた一般化された不安定問題を議論し、2 次元線型減衰力学系の例を示す。

6.1 非正規力学系

一次摂動に対する線型力学系は次のように表すことができる。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\boldsymbol{u} \tag{6.1}$$

ここで、Equation 6.1 を離散化し、$\boldsymbol{u}(t)$ を状態ベクトル、$\mathbf{A}$ は線型化された力学系演算子を表す行列である。背景場が定常であるとすると、$\mathbf{A}$ は時間に依存しないので、解は次のように書ける。

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{u}_0 \tag{6.2}$$

ここで、$[t, 0] = e^{\mathbf{A}t}$ は、時刻 0 から t までの時間発展行列である。

$\mathbf{A}$ が正規行列、つまり $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$（$\dagger$ はエルミート転置）なら、固有ベクトルは直交基底をなし、その集合は完備である。正規行列 $\mathbf{A}$ の最大成長率は固有スペクトル $\Lambda(\mathbf{A})$ の実部の最大

$$\lambda^{\mathbb{R}}_{\max}(\mathbf{A}) = \max\{\Re[\Lambda(\mathbf{A})]\}$$

であり、スペクトル半径の最大実部（複素平面の実軸つまり横軸で表されることから spectral abscissa）と呼ばれる。

時間発展演算子のスペクトルノルム $\|\cdot\|$ は

$$\left\|e^{\mathbf{A}t}\right\| = e^{\lambda^{\mathbb{R}}_{\max}(\mathbf{A})t}$$

で行列の最大特異値で表される。ノーマルモード不安定の例として、静止背景流中の対流の発生（Rayleigh–Bénard 問題）が挙げられる。

6.2　有限時間における摂動の成長

非正規演算子の有限時間における成長の力学は、演算子のスペクトルからは分からない。摂動の成長は、次の式で表す。

$$\sigma^2 = \frac{(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t))}{(\boldsymbol{u}(0), \boldsymbol{u}(0))} = \frac{(e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{u}(0), e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{u}(0))}{(\boldsymbol{u}(0), \boldsymbol{u}(0))} = \frac{(e^{\mathbf{A}^\dagger t}e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{u}(0), \boldsymbol{u}(0))}{(\boldsymbol{u}(0), \boldsymbol{u}(0))} \tag{6.3}$$

ここで内積 $(\cdot)$ はベクトル空間に対するユークリッドノルムを生成する。

Equation 6.3 から、時間 t の間に最も成長する摂動は、最大固有値 $\lambda_{\max}\left(e^{\mathbf{A}^\dagger t}e^{\mathbf{A}t}\right) = \|e^{\mathbf{A}}t\|^2$ で、以下に述べるように特異値分解で求めることができる。

6.3　時間発展演算子の特異値分解

時間発展演算子の特異値分解 SVD (singular value decomposition)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\dagger$$

により、初期状態（ユニタリ行列 $\mathbf{V}$ の列）最終状態（ユニタリ行列 $\mathbf{U}$ の列）の完備な集合及び成長 σ_i（Σ の対角要素）が得られる。

ある時間で最大成長する初期条件を最適摂動という。$\mathbf{V}_i$ は特異値の順に並べることができ、互いに直交する最適基底をなす。

6.4　固有ベクトルへの最大射影

最も効率がよい $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの励起は、このベクトルへの射影が最大なる単にベクトルと定義される。スペクトル半径の最大実部 $\lambda^{\mathbb{R}}_{\max}(\mathbf{A})$ は $t \to \infty$ での最適励起でもあ

る。正規演算子では、直交性により最大射影する単にベクトルはそのモード自身に一致する。非正規演算子では、固有ベクトルが直交しない。最大射影するベクトルは、双直交（biorthogonal）ベクトルである。

6.5 最適励起の二つの極限

6.5.1 $t \to \infty$

ノーマルモード理論と同様に、最大の実部を持つ固有値に対応する固有函数が最大成長する。$\mathbf{E}$ を固有値の順に並べた固有ベクトルを列とする行列 Δ をモード成長率を示す対角行列とする。

相似変換

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E}e^{\Delta t}\mathbf{E}^{-1} \tag{6.4}$$

において、$t \to \infty$ では、$\mathbf{E}$ の第一列と $\mathbf{E}^{-1}$ の第一行が卓越し、その増幅率は $e^{\Re\Delta_{11}t}$。

$$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t}_{\alpha\beta} = \mathbf{E}_{\alpha 1}e^{\Re\Delta_{11}t}\mathbf{E}^{-1}_{1\beta}$$

これは、時間 t で最大成長する単位ノルムの初期条件が $\mathbf{E}^{-1}_{1\beta}$ の複素共軛であることを示している。ノーマルモード理論において、固有値の実部の最大である固有ベクトルが卓越することを正しく示している。一方、このモードを励起する最適な初期条件は、そのモード自体ではなく、その双直交であることはノーマルモード理論から自明ではない。

6.5.2 $t \to 0$

最大瞬時成長は、テイラー展開で与えられる。

$$e^{\mathbf{A}^\dagger t}e^{\mathbf{A}t} \approx (\mathbf{I} + \mathbf{A}^\dagger t)(\mathbf{I} + \mathbf{A}t) = \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger)t + O(t^2)$$

最大瞬時成長率の厳しい上限は数値的最大実部（numerical abscissa）$\alpha(\mathbf{A})$ で与えられ、$\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger$ の固有値解析により求めることができる。

気象で重要な時間スケールは二つの極限の間にあり、時間発展演算子の SVD 解析で初期と最終構造を特定できる。この二つの極限を含めることにより、ノーマルモードよりも一般的な安定性解析を行うことができる。

6.6 二次元線型力学系の例

次の式で支配される簡単な力学系の一般化された安定性解析を行う。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -\cot\theta \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

安定固有値 $-1, -2$ に対応する固有ベクトルを並べた行列は次のようになる。

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Equation 6.5 の非正規性は交換子を計算することにより明らかになる。

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \cot\theta \begin{pmatrix} \cot\theta & 1 \\ 1 & -\cot\theta \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

Equation 6.7 は $\theta = \pi/2$ の場合に 0 となり、このとき Equation 6.5 は正規行列である。

6.6.1　非正規成長

最大瞬時成長率 $\lim_{t\to 0}\left\|e^{\mathbf{A}t}\right\|$ は $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\dagger)/2$ の最大固有値で与えられる。最大瞬時成長は $\sin\theta < 1/3$ のときに生じる。最大瞬時成長率を持つ単位ノルム摂動は x 軸と $\theta_\alpha = \arctan[(\sin\theta - 1)/\cos\theta]$ の角度をなす。$\theta = \pi/2$ のとき、系は正規となり、数値的最大実部は最も減衰の小さい固有ベクトルの方向である x 軸と一致し、なす角度は $\theta_\alpha = 0$ となる。$\theta \to 0$ の極限で非正規性が最大となるが、そのとき $\theta_\alpha = -\pi/4$ である。

Figure 6.1 に $\theta = \pi/100$ のときの時間変化傾向と最大成長及び最大減衰の方向を示す。

```
x <- seq(-1, 1, length.out = 10)
y <- seq(-1, 1, length.out = 10)

theta <- pi / 100
alpha <- atan((sin(theta) - 1) / cos(theta))

cot <- function(theta) {
  cos(theta) / sin(theta)
}
amat <- matrix(c(-1, 0, -cot(theta), -2), nrow = 2)

xy <- expand.grid(x = x, y = y)
X <- xy$x
Y <- xy$y
uv <- amat %*% t(as.matrix(xy))
```

```
a <- 0.005
u <- a * uv[1, ]
v <- a * uv[2, ]

plot(NULL, xlim = c(-1, 1), ylim = c(-1, 1), asp = 1,
     main = "Tendencies θ = π/100", xlab = "X", ylab = "Y",
     cex.main = 1.5, cex.lab = 1.5, cex.axis = 1.5)
arrows(X - u, Y - v, X + u, Y + v,
       col = "gray", lwd = 2, length = 0.1, angle = 10)
segments(cos(alpha), sin(alpha), cos(alpha + pi), sin(alpha + pi), col = "red", lwd = 2)
segments(cos(alpha + pi/2), sin(alpha + pi/2), cos(alpha + 3 * pi/2), sin(alpha + 3 * pi/2), col = "blue",
angle <- pi * seq(0, 2 * pi, length.out = 361)
lines(cos(angle), sin(angle), col = "black", lwd = 2)
```

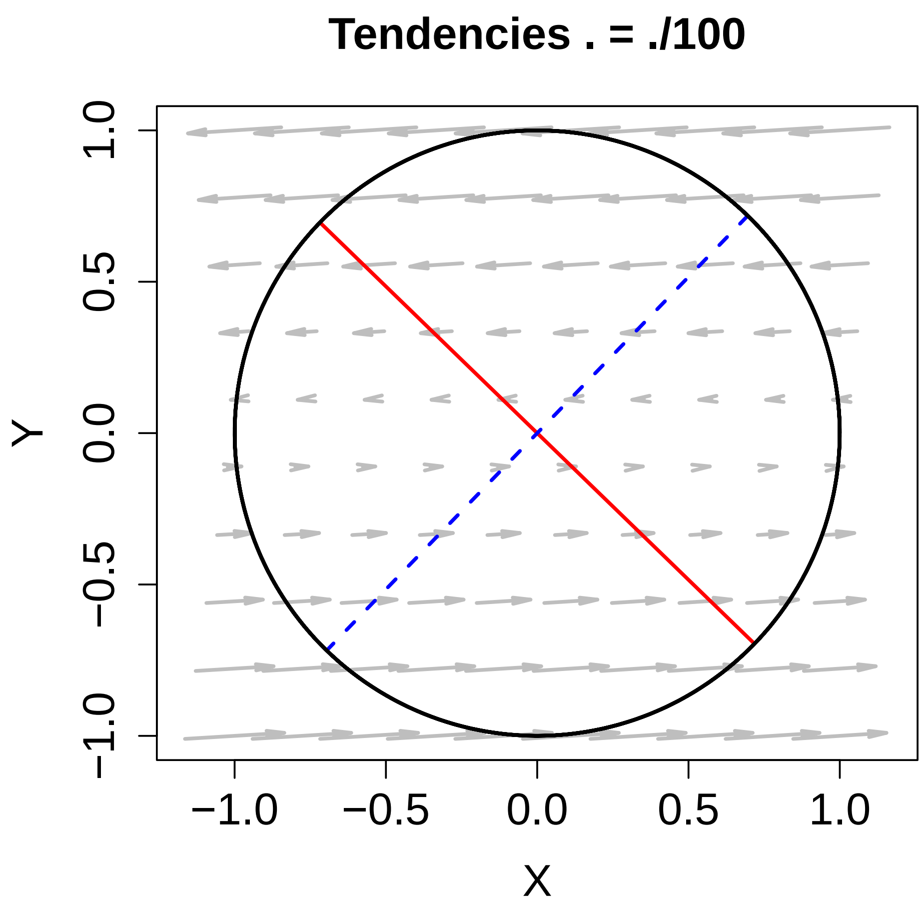

Figure6.1: 非正規行列による時間変化傾向ベクトル。赤実線と青破線は、それぞれ最大成長及び最大減衰の方向を示す。

最大瞬時成長及び最大成長を示す摂動の単位円の両端からの時間発展を Figure 6.2 に示す。減衰が始まるまで、一定時間成長していることが分かる。大域最適な最大成長は最大瞬時成長よりも、成長が大きい。最大成長は最も減衰の小さい固有ベクトルの双直交で $(\sin\theta, -\cos\theta)$ 方向に沿っている。

```
nt <- 40
dt <- 0.1

forward <- function(x, y, dt, nt) {
  xhist <- rep(0, nt)
  yhist <- rep(0, nt)
  xhist[1] <- x
```

```r
  yhist[1] <- y
  for (i in 2:nt) {
    tendency <- amat %*% c(xhist[i-1], yhist[i-1])
    xhist[i] <- xhist[i-1] + dt * tendency[1]
    yhist[i] <- yhist[i-1] + dt * tendency[2]
  }
  list(x = xhist, y = yhist)
}

plot(NULL, xlim = c(-8, 8), ylim = c(-1, 1),# asp = 1,
     main = "Trajectories θ = π/100", xlab = "X", ylab = "Y",
     cex.main = 1.5, cex.lab = 1.5, cex.axis = 1.5)
angle <- pi * seq(0, 2 * pi, length.out = 100)
segments(cos(pi/2 + alpha), sin(pi/2 + alpha), cos(-alpha), sin(-alpha), col = "red", lwd = 2)
segments(0, -1, 0, 1, col = "blue", lwd = 2, lty = 2)
lines(cos(angle), sin(angle), col = "black", lwd = 2)

x1 <- c(sin(theta), sin(theta + pi), cos(alpha), cos(alpha + pi))
y1 <- c(-cos(theta), -cos(theta + pi), sin(alpha), sin(alpha + pi))
co <- c("blue", "blue", "red", "red")
pc <- c(4, 19, 4, 19)
for (i in 1:length(x1)){
  hist <- forward(x1[i], y1[i], dt, nt)
  points(hist$x, hist$y, pch = pc[i], cex = 1.5, col = co[i])
}
legend("topright", c("max inst growth", "max growth"), lw = 2,
       lty = c(1, 2), col = c("red", "blue"))
```

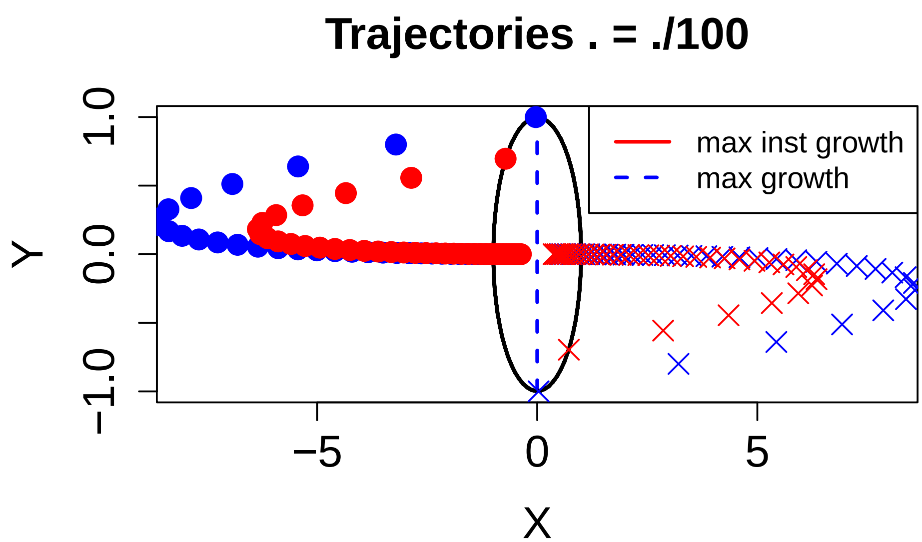

Figure6.2: 最大瞬時成長（赤）及び最大成長（青）の時間発展

時刻 t における時間発展演算子は次のように書ける。

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & \cot\theta(e^{-2t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$t \to \infty$ では

$$\lim_{t\to t} e^{\mathbf{A}t} \approx \begin{pmatrix} e^{-t} & -\cot\theta e^{-t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$e^{\mathbf{A}t}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{e^{-t}}{\sin\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。このモードの最適励起がその双直交により生じ、大きさが $1/\sin\theta$ 倍になることが確認できる。

$\theta = \pi/100$ 及び $\theta = \pi/10$ について、最適成長を時間の函数として Figure 6.3 に示す。成長の上限は演算子の固有ベクトル行列の条件数 $\kappa(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E}\|\|\mathbf{E}\|^{-1}$ から Equation 6.4 を考慮して

$$\left\|e^{\mathbf{A}t}\right\| \leq \kappa(\mathbf{E}) \left\|e^{\Lambda t}\right\| = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\lambda_{\max} t} \tag{6.8}$$

```
library("Matrix")

optimal.growth <- function(t, theta) {
  amat <- matrix(c(-1, 0, -cot(theta), -2), nrow = 2)
  sqrt(max(eigen(expm(t(amat) * t) %*% expm(amat * t))$values))
}

lambda.max = -1
ti <- seq(0, 5, length.out = 101)
gr <- sapply(ti, optimal.growth, theta)
plot(ti, gr, type = "l", ylim = c(0, 10), lwd = 2, col = "red",
     cex.main = 1.5, cex.lab = 1.5, cex.axis = 1.5,
     main = "Optimal growth", xlab = "t", ylab = "||exp(At)||")
lines(ti, cot(0.5 * theta) * exp(lambda.max * ti), lwd = 2, col = "red", lty = 2)
gr <- sapply(ti, optimal.growth, theta * 10)
lines(ti, gr, lwd = 2, col = "blue")
lines(ti, cot(0.5 * theta * 10) * exp(lambda.max * ti), lwd = 2, col = "blue", lty = 2)
legend("topright", c("θ=π/100", "θ=π/10"),
       lwd = 2, col = c("red", "blue"), cex = 1.5)
```

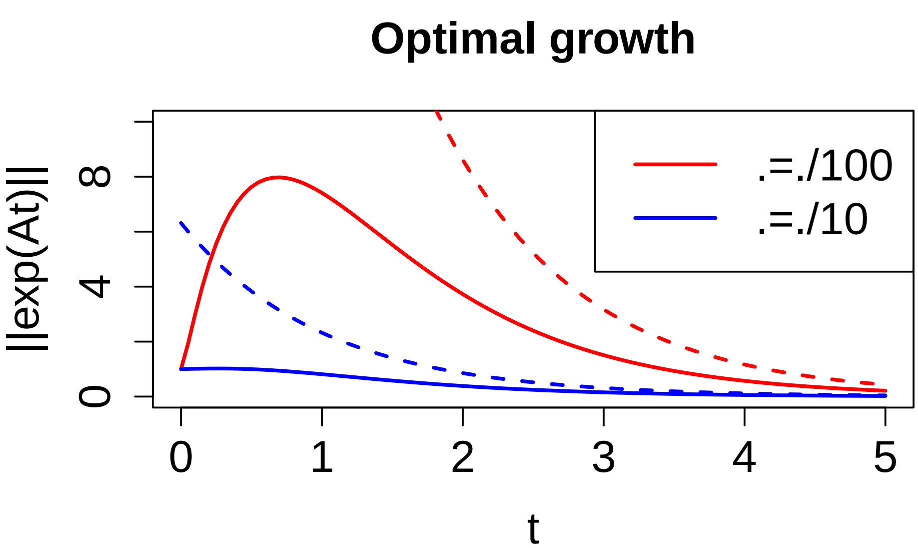

Figure6.3: 非正規行列の最適成長。赤は $\theta = \pi/100$、青は $\theta = \pi/10$。実線は成長率、破線は成長の上限。横軸は時間。

参考文献

Eady, E. T., 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, 33–52, https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1949.tb01265.x.

Enomoto, T., 2019: Influence of the Track Forecast of Typhoon Prapiroon on the Heavy Rainfall in Western Japan in July 2018. *SOLA*, **15A**, 66–71, https://doi.org/10.2151/sola.15A-012.

Ertel, H., 1942a: Ein neuer hydrodynamischer Erhaltungssatz. *Naturwissenschaften*, **30**, 543–544, https://doi.org/10.1007/BF01475602.

——, 1942b: Ein neuer hydrodynamischer Erhaltungssatz. *Naturwissenschaften*, **30**, 543–544, https://doi.org/10.1007/BF01475602.

——, 1942c: Ein neuer hydrodynamischer wirbelsatz. *Meteor. Zeitschrift*, **59**, 277–281.

——, 1942d: Über das Verhältnis des neuen hydrodynamischen Wirbelsatzes zum Zirkulationssatz von V. Bjerknes. *Meteor. Zeitschrift*, **59**, 385–387.

Farrell, B. F., and P. J. Ioannou, 1996: Generalized Stability Theory. Part I: Autonomous Operators. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **53**, 2025–2040, https://doi.org/10.1175/1520-0469(1996)053%3C2025:GSTPIA%3E2.0.CO;2.

Haltiner, G. J., and R. T. Williams, 1980: *Numerical prediction and dynamic meteorology*. Second. John Wiley & Sons,.

Hoskins, B. J., and M. A. Pedder, 1980: The diagnosis of middle latitude synoptic development. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **106**, 707–719, https://doi.org/10.1002/qj.49710645004.

——, I. Draghici, and H. C. Davies, 1978: A new look at the ω-equation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **104**, 31–38, https://doi.org/10.1002/qj.49710443903.

Kalnay, E., and Coauthors, 1996: The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **77**, 437–471, https://doi.org/10.1175/1520-0477(1996)077%3C0437:TNYRP%3E2.0.CO;2.

Kasahara, A., 1974: Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, **102**, 509–522.

Pedlosky, J., 1987: *Geophysical fluid dynamics*. Second. Springer-Verlag,.

Rayleigh, L., 1880: On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **10**, 73–78, https://doi.org/10.1080/14786448008626893.

Rossby, C.-G., 1940: Contributions to the theory of the general circulation. *EOS*, **21**, 261–262, https://doi.org/10.1029/TR021i002p00261.

Sanders, F., and B. J. Hoskins, 1990: An easy method for estimation of Q-vectors from weather maps. *Wea. Forecasting*, **5**, 346–353, https://doi.org/10.1175/1520-0434(1990)005%3C0346:AEMFEO%3E2.0.CO;2.

Schubert, W., E. Ruprecht, R. Hertenstein, R. N. Ferreira, R. Taft, C. Rozoff, P. Ciesielski, and H.-C. Kuo, 2004: English translations of twenty-one of Ertel's papers on geophysical fluid dynamics. *Meteorologische Zeitschrift*, 527–576, https://doi.org/10.1127/0941-2948/2004/0013-0527.

付録 A

回転系の運動方程式

A.1 回転系

角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する系を考える。この系とともに回転する定ベクトル $\boldsymbol{A}$ とすると，静止系からみたこのベクトルの時間変化は次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{A} \tag{A.1}$$

回転系からみた任意のベクトル $\boldsymbol{B}$ の時間変化（添字 R）は，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}_3$$

であるが，静止系から見ると $\boldsymbol{B}$ だけでなく，回転系の単位ベクトルも時間変化しているので

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{I}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + B_1\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_1}{\mathrm{d}t} + B_2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_2}{\mathrm{d}t} + +B_3\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_3}{\mathrm{d}t}$$

とすると，静止系からみたこのベクトルの時間変化は次のようになる。単位ベクトルは定ベクトルなので，Equation A.1 を適用すると

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{I}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + B_1\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}_1 + B_2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}_2 + B_3\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}_3 \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{A.2}$$

Equation A.2 より位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の時間変化は，次のようになる。

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{I}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \tag{A.3}$$

この式は，静止系からみた速度 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}} \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t\,|_{\mathrm{I}}$ は，回転系からみた速度（相対速度）に剛体回転による速度 $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ を加えたものであることを示している。

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \tag{A.4}$$

$\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}$ に Equation A.3 を適用すると

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{I}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}$$

この式の右辺を回転系の変数で表すため Equation A.4 を代入すると

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{I}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}$$

右辺第 2 項 $2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}$ はコリオリ力。右辺第 3 項はベクトル解析の公式

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

を用いると次のようになる。

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = -\Omega^2 \boldsymbol{r}$$

ここで $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \sin\theta$, $\Omega \equiv |\boldsymbol{\Omega}|$ である。この項は遠心力を表す。右辺の最後の項は，長い時間スケールを考えない限り無視できる。

A.2　運動方程式

静止系の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{F}$$

と表せる。ここで $\boldsymbol{F}$ は外力や粘性力を表している。

遠心力を重力に含め，$\boldsymbol{g}$ と表すと，回転系の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}$$

と書ける。

A.3　直交曲線座標

直交曲線座標 (i_1, i_2, i_3) において，位置ベクトル

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z) = \boldsymbol{r}(i_1, i_2, i_3)$$

接線ベクトル

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_3}$$

の長さをスケールファクタ

$$h_1 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_1}\right|, h_2 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_2}\right|, h_3 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_3}\right|$$

という。スケールファクタで接線ベクトルを規格化したものが基本ベクトル

$$\boldsymbol{i}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_1}, \boldsymbol{i}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_2}, \boldsymbol{i}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i_3}$$

である。

直交曲線座標における勾配，発散，ラプラシアン（勾配の発散），回転は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial i_1}\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial i_2}\boldsymbol{i}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial i_3}\boldsymbol{i}_3 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial i_1} + \frac{\partial}{\partial i_2} + \frac{\partial}{\partial i_3}\right] \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial i_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial i_1}\right) + \frac{\partial}{\partial i_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial i_2}\right) + \frac{\partial}{\partial i_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial i_3}\right)\right] \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial i_2} - \frac{\partial}{\partial i_3}\right]\boldsymbol{i}_1 \\
&\quad + \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial i_3} - \frac{\partial}{\partial i_1}\right]\boldsymbol{i}_2 \\
&\quad + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial i_1} - \frac{\partial}{\partial i_2}\right]\boldsymbol{i}_3
\end{aligned}$$

A.4　球座標系

地球上の 1 点の座標は，経度 λ と緯度 ϕ で表される。数学では，球面上の座標を表すのに北極から測った余緯度$theta$を用いることが多い。余緯度は $\theta = \pi/2 - \phi$ で表され，北極が 0，赤道が $\pi/2$, 極が π である。三角函数の加法定理より

$$
\begin{aligned}
\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\phi + \sin\frac{\pi}{2}\sin\phi = \sin\phi \\
\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\phi - \cos\frac{\pi}{2}\sin\phi = \cos\phi
\end{aligned}
$$

のように cos と sin とが入れ替わる。

A.4.1　球座標とデカルト座標との関係

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\lambda\cos\phi \\
y &= r\sin\lambda\cos\phi \\
z &= r\sin\phi
\end{aligned}
$$

本講義では，赤道平面上で x 軸は $\lambda = 0$ の方向に，y 軸は $\lambda = \pi/2$ に取る。z 軸は原点から北極を向く方向に取る。気象学では，それぞれの点で西風を u, 南風を v で表す。

A.4.2　球座標上の微分

球座標のスケールファクタは

$$
h_\lambda = r\cos\phi,\ h_\phi = r,\ h_r = 1
$$

である。

緯度 $\phi = \pi/2 - \theta$ で表した球座標での勾配，発散，ラプラシアン（勾配の発散），回転は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial f}{\partial \lambda}\boldsymbol{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{k} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right] \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cos\phi\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right] \\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r}\left[A_r\phi - \frac{\partial}{\partial r}\right]\boldsymbol{i} \\
&\quad + \frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \lambda}\right]\boldsymbol{j} \\
&\quad + \frac{1}{r^2\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

A.4.3　全微分

全微分は，函数 $f = f(t, x, y, z)$ の微小変化

$$
\delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \cdots
$$

の極限で定義される。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta f}{\delta t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)f
\end{aligned}
$$

公式

$$
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2 - \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})
$$

を用いる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2 &= \frac{1}{2}\nabla(u^2+v^2+w^2) \\
&= \frac{1}{r\cos\theta}\left(u\frac{\partial u}{\partial \lambda} + v\frac{\partial v}{\partial \lambda} + w\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right)\boldsymbol{i} \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(u\frac{\partial u}{\partial \phi} + v\frac{\partial v}{\partial \phi} + w\frac{\partial w}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{j} \\
&\quad + \left(u\frac{\partial u}{\partial r} + v\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial r}\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{i}}{r}\left[\frac{\partial w}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}\right]+\frac{\boldsymbol{j}}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right] \\
+\frac{\boldsymbol{k}}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial v}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\phi}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) = \\
&\quad\left[\frac{v}{r\cos\phi}\left\{\frac{\partial v}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}-\frac{w}{r\cos\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right\}\right]\boldsymbol{i} \\
&\quad+\left[\frac{w}{r}\left\{\frac{\partial w}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}\right\}-\frac{u}{r\cos\phi}\left\{\frac{\partial v}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\right]\boldsymbol{j} \\
&\quad+\left[\frac{u}{r\cos\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right\}-\frac{v}{r}\left\{\frac{\partial w}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}\right\}\right]\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

これらを整理すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\frac{uv\tan\phi}{r}+\frac{uw}{r}\right]\boldsymbol{i} \\
&\quad+\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{vw}{r}+\frac{u^2\tan\phi}{r}\right]\boldsymbol{j} \\
&\quad+\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-\frac{u^2+w^2}{r}\right]\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

を得る。

一方

$$
\boldsymbol{\Omega} = 0\boldsymbol{i}+\Omega\cos\phi\boldsymbol{j}+\Omega\sin\phi\boldsymbol{k}
$$

と書けるので，コリオリ項は

$$
-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u} = -2\Omega[(w\cos\phi-v\sin\phi)\boldsymbol{i}+u\sin\phi\boldsymbol{j}-v\cos\phi\boldsymbol{k})]
$$

となる。結局，球座標で表した回転系の運動方程式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\frac{uv\tan\phi}{r}+\frac{uv}{r} &= -\frac{1}{\rho r\cos\phi}\frac{\partial p}{\partial\lambda}+2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi+F_\lambda \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{u^2\tan\phi}{r}+\frac{vw}{r} &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\phi}-2\Omega u\sin\phi+F_\phi \\
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-\frac{u^2+v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}-g+2\Omega u\cos\phi+F_r
\end{aligned}
$$

付録 B

一般化鉛直座標

鉛直座標は，物理的な高さ z に限らない。z と 1 対 1 に対応する様々な変数を鉛直座標として用いることができる。まず，合成函数の偏微分の復習から始める。

B.1　合成函数の偏微分

$f = f(x, y)$，$x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$ がいずれも u，v に関して偏微分可能であれば，合成函数 $f = f((\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は，u，v に関して偏微分可能で，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_v &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_v + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_v, \\
\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_u &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_u
\end{aligned}
$$

と書ける。今，$x = u, v = s$ 即ち $y = z(x, s)$ の場合を考えると，

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_s = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_z + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_u \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_s, \tag{B.1}
$$

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_u = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_u \left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_u \tag{B.2}
$$

となる。

B.2　一般化鉛直座標

Kasahara (1974) に基づいて，一般化された鉛直座標を導入する。Equation B.2 を用いて，Equation B.1 を書き換えると，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_s = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_z + \left.\frac{\partial s}{\partial z}\right|_u \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_s \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_u$$

と書ける。u を水平座標 x, y や時刻 t と見なすと,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z + \frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s \frac{\partial f}{\partial s}, \\ \nabla_s f &= \nabla_z f + \frac{\partial s}{\partial z}\nabla_s z \frac{\partial f}{\partial s} \end{aligned} \tag{B.3}$$

と書ける。これらを使うと $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_s + \dot{s}\frac{\partial}{\partial s} \tag{B.4}$$

と表すことができる。ここで,

$$\dot{s} \equiv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial s}{\partial z}\left[w - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s - \boldsymbol{v}\cdot\nabla_s z\right]$$

である。s は一般化された鉛直座標，$\dot{s}$ は一般化された鉛直速度である。

B.3　支配方程式系

s 座標で静力学平衡は

$$g\frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{B.5}$$

となる。$m = \rho\partial z/\partial s$ と置くと

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -mg$$

と書ける。m は一般化鉛直座標での「密度」と考えることができる。

Equation B.3，Equation B.4，Equation B.5 を用いると，摩擦がないときの水平の運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla_s p - g\nabla_s z$$

と書ける。また，連続の式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + \nabla_s \cdot \left(\boldsymbol{v}\frac{\partial p}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\dot{s}\frac{\partial p}{\partial s}\right) = 0$$

と変形される。熱力学の式は全微分で表されるので，形は変わらない。ただし，全微分は Equation B.4 で表される。