

確率微分方程式を用いた位相空間上における季節予測可能性：理論と中高緯度冬季におけるデータ解析

稲津 将・中野直人 (北大院理)、向川 均(京大防災研)

1. はじめに

多くの気象予報センターでは近年、アンサンブル予報による季節予報が現業化されている。これにより予報精度の向上や予測可能性の評価に関する情報を得ることが出来るようになった。たとえば、欧州中長期予報センターや日本の気象庁では 50 アンサンブルメンバーによる 100km 空間解像度モデルで 1 か月予報が行われている。同時に、再解析データの整備も進んでおり、数十年分の観測を同化したデータが公開されている[Uppala et al. (2005); Onogi et al. (2007)]。このようにアンサンブル予報と再解析データは、季節予報と力学の理解を深めるのに十分な長さのデータが蓄積されているといえる。

季節予報には 1 週間から 1 か月程度の長周期変動の理解が不可欠である。低次元非線形力学系におけるアトラクターに、軌道が近づく（離れる）ときに予測可能性が高く（低く）なることから、これを見つける研究がおこなわれてきた (Legras and Ghil 1985; Mukougawa 1988; Cehelsky and Tung 1987; Itoh and Kimoto 1996; Reinhold and Pierrehumbert 1982; Yamane and Yoden 1997)。低次元系における多重アトラクターの議論と、現実の高次元系における予測可能性の議論の間には乖離が大きい。また、観測データから

アトラクターを見出す試みも行われているが、確率密度関数の正規分布からのずれに関する統計的有意性を疑う研究もあるように、その発見には労苦を伴う (Kimoto and Ghil 1993a; Mo and Ghil 1988; Molteni et al. 1990)。これらの困難は、高次元の大気運動を、変数や領域を制限し、振動を長周期変動に限定し、高次モードを無視することで、低次元の力学系に縮約できるという仮説に由来する。

短周期変動などの項を直接ノイズとして扱う確率微分方程式 (Hasselmann 1976; Penland and Matrosova 1998)

$$dx_i = A_i(\mathbf{x})dt + \sum_j S_{ij}(\mathbf{x})dW_j,$$

は、もう一つの長周期変動モデルの可能性を秘めている。ただし、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ は大気の状態ベクトル、 $A_i(\mathbf{x})$ は決定論的ドリフトベクトル、 $S_{ij}(\mathbf{x})$ は状態に依存する乗法的ノイズ、 dW_j は各成分が独立なウィナー過程を表す。Newman et al. (2003) は線形方程式にノイズを加えたモデルにより、経験的に季節予報が可能であることを示した。Sura et al. (2005) はさらに長周期変動が作る確率密度関数の非正規性は、線形モデルに乗法的ノイズを加えても実現すると主張した。しかし、Branstator and Berner (2005) は超長期の GCM 積分のデータを用いて、惑星波動には非線形性が内在することを確率微分方

程式の枠組みで示した。線形確率論的理解と非線形決定論的理解の間には未だ決着しない問題もあるが、ここではその問題に深入りしない。

本研究の目的は確率微分方程式を季節予測可能性と結びつける理論を構築することである。まず、再解析データを使って、対流圏中緯度、北半球冬季の長周期変動の卓越2モードを基底とする位相空間を張り、その位相空間上に、現業の1か月予報の予報スプレッドを射影する。このような試みは、サンプル数が少ないこともあって、これまで行われることはなかった。本研究ではそのようなデータ寡少の欠を、確率微分方程式を使った予報・解析データ間のつながりに関する理論を構築することで補う。ここで確率微分方程式に加える乗法的ノイズは、従来の確率微分方程式で言われているようなパラメタライズ不能な短周期擾乱の作用のみならず、次元の縮約、変数・領域の制限に伴う外力の効果までを含むものとする。系を低次元に縮約することで、決定論的ドリフトはランダムなベクトルに近づくが、確率論的なノイズがそのランダムネスの特徴を代表することとなる。本研究で新たに提案する理論は、接線型方程式に乗法的ノイズを加えて確率微分方程式にすることである。Sura et al. (2005)に従えば、確率微分方程式の係数は経験的に求めることが出来るので、決定論的に広がるべき予報誤差をアンサンブル平均誤差行列の特異値解析から、また確率論的に広がるべき予報誤差をアンサンブル平均拡散テンソルの固有値解析からそれぞれ求めることができる。本研

究ではそれらと実際の現業における予報スプレッドを比較する。

2. データ

本研究で用いる季節予報データは気象庁の全球モデルを用いた1か月アンサンブル予報である。2001/02冬から2009/10冬までの9冬分の週2回の予報データの蓄積がある。2006年からの現業では、水平解像度はTL155、鉛直層40のモデルを使い、アンサンブル数が50で1か月予報を実施している。それまではT106L40モデルで26アンサンブルを使っている。本研究ではそれらのうち成長育成法によって初期アンサンブルを作成した25(13)アンサンブルを用いた。

一方、本研究で用いた再解析データは気象庁再解析データJRA25/JCDASである(Onogi et al. 2007)。格子間隔は水平1.25度で時間間隔は6時間である。1979/80冬から2009/10冬までのデータを用いた。500 hPaの等圧面高度に10日の低周波フィルターを使って、対流圏北半球冬季の長周期変動を取り出し、その気候値を差し引くことで長周期変動アノマリを作成した。さらに、北緯20度以北の領域に対し主成分分析を行って、上位2モードを位相空間の基底として選んだ。第1モードは北大西洋振動に射影の大きなパターンであり、第2モードはPNAに射影の大きなパターンである。例えば、北極振動はこの平面内で第2象限と第4象限を結ぶ線上の運動として表現できる(Itoh 2008)。ここで注意すべきは長周期変動アノマリの上位2モードは、全分散のわずか25%しか説明してない点である。この

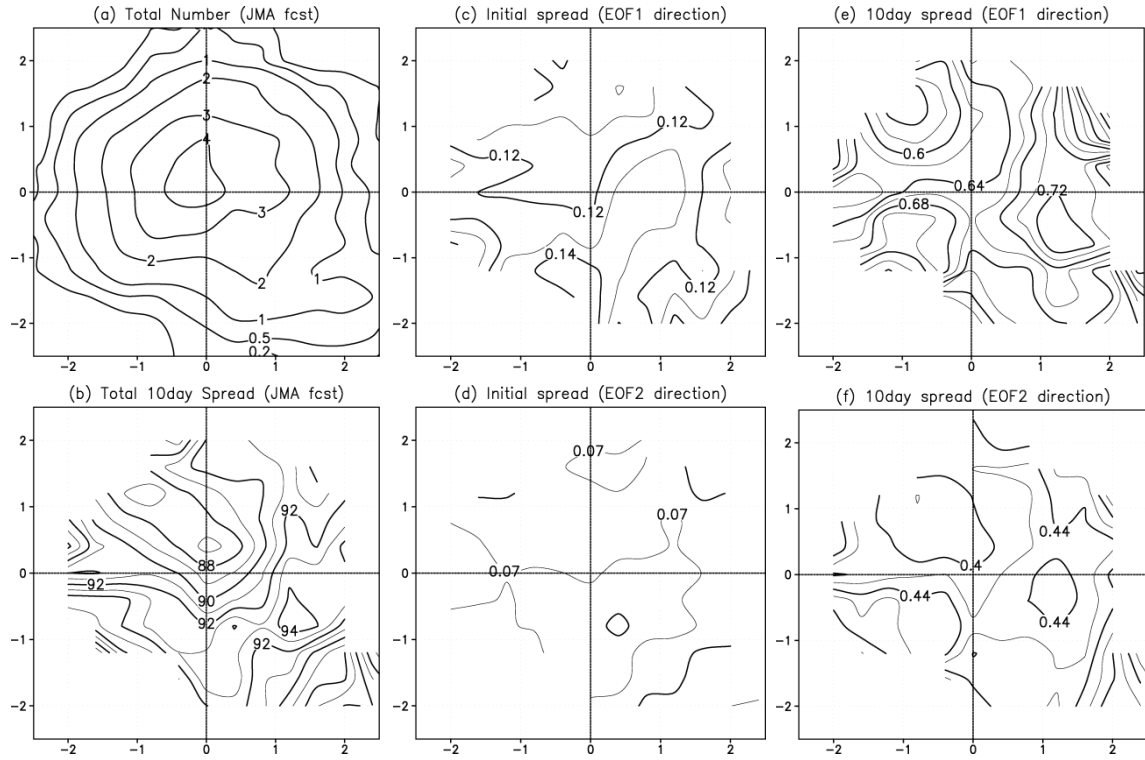


図 1 : 2つの主成分により張った位相空間内における季節予測に関する統計量。ただし、すべては 0.4×0.4 のビンに統計量を集約し、 3×3 の平滑化を行った。(a) 本研究で用いた気象庁アンサンブル予報の数。等値線は 0.2, 0.5, 1, 2, 3, と 4 に引いた。以降、サンプル数が 0.5 に達しない領域については除外する。(b) 500 hPa 等圧面高度アノマリに関する全予報スプレッド。等値線間隔は 1 m。(c, d) 位相空間内におけるもっとも広がる方向とそれに直交する方向の初期スプレッド。等値線間隔は 0.01。(e, f) 位相空間内におけるもっとも広がる方向とそれに直交する方向の 10 日予報スプレッド。等値線間隔は 0.02。

ような大胆な次元の縮約によって失われる情報は非常に多い。

3. 理論

気象力学の決定論的方程式

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}(x).$$

に対し、接線型方程式は

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} y_j \equiv \sum_j J_{ij} y_j,$$

となる。ただし、 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ は誤差ベクト

ルであり、 J_{ij} はヤコビアンである。時刻 $t = 0$ における初期誤差 $\mathbf{y}(0)$ に対し、

$$y_i(t) = \sum_j M_{ij}(t, 0) y_j(0),$$

と書ける。ただし、 $M_{ij}(t, 0)$ は誤差行列という。誤差行列 $\mathbf{M}(t, 0)$ の特異値分析

$$\mathbf{M}(t, 0) \mathbf{v}^{(m)} = \sigma_D^{(m)} \mathbf{u}^{(m)},$$

は、誤差成長にかかわる初期と最終状態の直交基底 $\mathbf{v}^{(m)}$ と $\mathbf{u}^{(m)}$ を与える。ここで、最大成長率は $\|\mathbf{M}(t, 0)\| = \sigma_D^{(1)}$ であることに注意すると、予報スプレッドは

$$E_D = \varepsilon \|\mathbf{M}(t, 0)\|,$$

と求めることができる。ただし、初期スプレッドは ε である。決定論的なドリフトが大気状態ベクトルの時間変化のアンサンブル平均として表されるとすると、

$$A_i \cong \left\langle \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \right\rangle,$$

となる。ただし、 Δt は離散時系列の時間間隔であり、ここでは6時間とする。誤差行列が近似的にヤコビアン指数行列であること

$$\mathbf{M} \cong \exp(\mathbf{tJ}) \cong \mathbf{I} + \mathbf{tJ}.$$

を使うと、経験的に誤差行列の特異値分解からアンサンブル平均の意味で決定論的に成長する誤差を見積もることができる。

本研究で新たに提唱する理論では、乗法的ノイズが次元縮約の影響、系にとっての外力の影響、およびパラメタライズ不能な短周期擾乱の影響のすべてを担うとして、接線型方程式に乗法的ノイズを加え、

$$dy_i = \sum_j J_{ij} y_j dt + \sum_j S_{ij} dW_j.$$

とする。上式のうちヤコビアン項がない場合を考えると、誤差共分散は拡散テンソル $\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ のアンサンブル平均を使って、

$$\int_0^T \langle y_i y_k \rangle dt = \int_0^T 2\langle \mathbf{B} \rangle dt.$$

と書ける。ここで拡散テンソル \mathbf{B} の固有値解析は

$$\mathbf{B} \mathbf{e}^{(m)} = \sigma_S^{(m)} \mathbf{e}^{(m)},$$

誤差成長に関する直交基底 $\mathbf{e}^{(m)}$ を与える。ここで \mathbf{B} が正値エルミートであることに

注意すると、最大成長率は $\|\mathbf{B}\| = \sigma_S^{(1)}$ で与えられる。位相空間内で \mathbf{B} が局所的に定数であると仮定すると、確率過程に伴う予測スプレッドは

$$E_S = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\|\mathbf{B}\|T}.$$

と書ける。一方、確率微分方程式に付随するフォッカー=プランク方程式は、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} A_i(\mathbf{x})P + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B_{ij}(\mathbf{x})P,$$

である。ただし、 $P = P(\mathbf{x}, t)$ は位相空間内の確率密度関数である。過去の研究に従い、拡散テンソルも経験的に

$$B_{ij} \cong \left\langle \frac{[x_i(t + \Delta t) - x_i(t)][x_j(t + \Delta t) - x_j(t)]}{\Delta t} \right\rangle,$$

と解析データのアンサンブル平均として見積もることができる。

これらの理論的考察から、アンサンブル平均の意味での誤差行列と拡散テンソルが、決定論的と確率論的な予測スプレッドを解析データより与えることが分かった。

4. 結果

図1は気象庁1か月予報の予報誤差に関する統計量を、再解析データを基礎にした長周期変動アノマリの主成分を基底とする位相空間への射影したものである。Sura et al. (2005)に従い、図は 0.4×0.4 のビンについて 3×3 の空間平滑化を行うが、2001/02~2009/10冬季の間に、全216回の予報しかないため、位相空間の原点付近でも数個程度の予報データに基づく統計量であることに注意がいる(図1a)。したがって、図1の結果は統計的有意性を検定するに耐えない程度の大雑把な見積

もりとなる。予報における 500 hPa 等圧面高度のスプレッドを、全スプレッドのほか(図 1b)、位相空間上に射影した最大に散らばった方向とそれと直交した方向のスプレッド(図 1e,f)について図示した。すると、第 2 象限で予測可能性が高く、第 4 象限で予測可能性が低いという結果を得た。両象限間のスプレッドの差は、全スプレッドで 10%程度であるが、位相空間に射影したもののうち最大成長方向については 20%を超える。初期には図 1c,d 程度のスプレッドがあって、誤差が成長することで図 1e,f のような分布になるのである。

前節の理論的考察により、非線形決定論的な誤差行列と確率論的な乗法的ノイズのそれぞれに伴う誤差成長をアンサンブル平均の意味で経験的に求めることが出来ることが分かった。位相空間内に射影したヤコビアンノルム(図 2b)は明らかに 10 日予報スプレッド(図 1e)とは異なり、原点付近で値が小さく、原点から離れたところで値が大きいほかは、偏角依存性の小さな分布である。非線形決定論的な誤差の推定値を、ヤコビアンノルムのアンサンブル平均より見積もると、

$$E_D = \varepsilon \|\mathbf{M}(T, 0)\| \\ \sim 0.12 \times (1 + 0.2) \sim 0.14,$$

となる。ただし、図 1b より初期誤差のスプレッドは $\varepsilon \sim 0.12$ 程度とし、図 2b からヤコビアンノルムは $\|\mathbf{J}\| \sim 0.2 \text{ (10 days)}^{-1}$ 程度とした。この推定された予測スプレッド E_D は現業における予測スプレッド $E \sim 0.7$ (図 1e) に比べて随分小さい。他方、経験的に推定された拡散テンソルの位相空間内の分布(図 1e)は、予測スプレッド

のそれに第 1 象限の一部を除き非常に良い一致をしている。拡散テンソルノルムの極大は第 3 象限と第 4 象限にあり、極小は第 1 象限から第 2 象限に広がる。拡散テンソルの優固有ベクトルは第 2 象限を除き、概ね第 2 主成分の方向を向いている(図 2c)。この点も予報スプレッドの最大成長方向の最頻値と一致している(図略)。第 2 象限においては、予報スプレッドにおいて成長が等方的であり、拡散テンソルの優固有値と第 2 固有値の比も 1 に近い。拡散テンソルより見積もられる確率過程要因の予測スプレッドは

$$E_S = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\|\mathbf{B}\|T} \\ \sim \sqrt{0.12^2 + 2 \times 0.15} \sim 0.56,$$

となる。ただし、図 2c より拡散テンソルノルムを $\|\mathbf{B}\| \sim 0.15 \text{ (10 days)}^{-1}$ と見積もった。この結果は、位相空間上の予報スプレッドが、次元の縮約、外力の影響、およびパラメタライズ不能な短周期擾乱の作用のすべてを集約した意味での確率過程に主によっていることを示唆している。さらに、拡散テンソルの第 2 固有値 $\sigma^{(2)}$ はおよそ 0.08 で第 4 象限に極大を持つ(図 2d)。この方向における確率過程によって生じる予測スプレッドの大きさは

$$E_S^{(2)} = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\sigma^{(2)}T} \\ \sim \sqrt{0.12^2 + 2 \times 0.08} \sim 0.42,$$

と見積もられる。これは最小成長方向の予測スプレッド(図 1f)と一致する。

気候学的な確率密度関数(図 2a)と予測スプレッド、または拡散テンソルとの関係は非常に興味深い。確率密度関数は多重アトラクタの存在(Kimoto and Ghil 1993)または分布の非正規性(Sura et al. 2005)が示唆される過去の研究と整合的

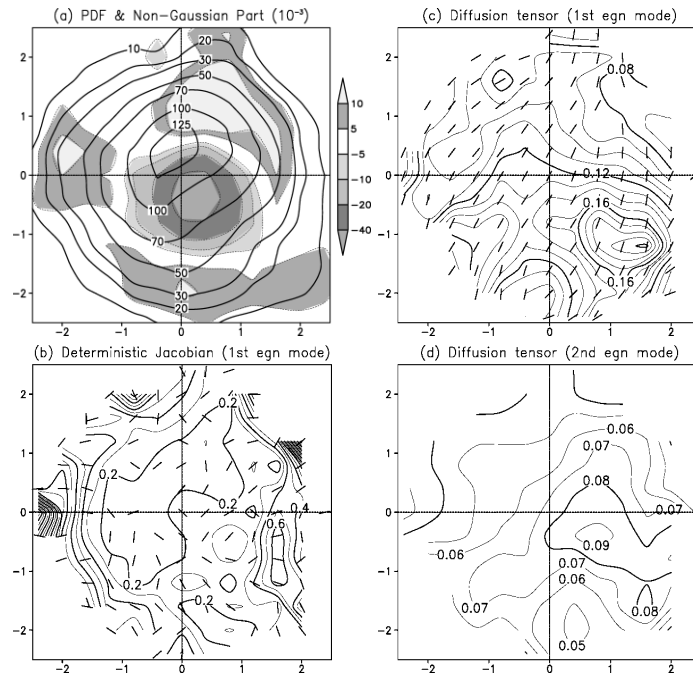


図 2: (a) 2つの主成分によって張られた位相空間上における(等値線)確率密度分布と(陰影)それと2変数正規分布とのずれ(単位は 10^{-3})。等値線は10, 20, 30, 50, 70, 100, and 125×10^{-3} であり、陰影は図右に従う。以降の図では確率密度関数が0.01より小さいところは排除している。(b) ヤコビアンノルム。等値線間隔は $0.1 (10 \text{ day})^{-1}$ である。(c, d) 拡散テンソルの第1と第2固有値。等値線間隔は $0.01 (10 \text{ day})^{-1}$ である。(b)および(c)の線分は最大成長方向を表している。

である。確率分布と2変数正規分布と比較から、第4象限の方向においては分布が疎なところがあり、第1象限から第2象限にかけて分布が密なところがある。分布が密(疎)になっているところに、予報スプレッドが小さい(大きい)ところがある。

5. 結論

本研究では、季節予測可能性と確率微分方程式の係数の間に理論的な関係を導き、1979/80年から2009/10年までの北半球冬季の長周期変動の主成分により張られた位相空間上に、それらを射影した。その結果、10日予報の数は2次元位相空間に

射影するには足りないところを考慮しても、10日予報のスプレッドは位相空間上に顕著な非一様性を示していた。本研究で新たに提唱した理論ではアンサンブル平均の意味で決定論的な誤差成長と確率論的な誤差成長を解析データから見積もることができる。それによると現業の予測誤差の成長は、その方向まで含めて拡散テンソルと非常に一致をしており、一方で決定論的な誤差行列とは一致していなかった。

謝辞:

本研究は北海道大学 M&T グループ、榎本剛准教授(京都大学)、見延庄士郎教授

(北海道大学)から有益なコメントをいただきました。また、気候変動適応戦略プログラム、科学研究費新学術領域22106008、基盤 (B) -----, 若手(B)からの資金を得ています。坂上貴之教授(北海道大学)からは共同研究に際して資金援助をいただきました。

参考文献

- Berner, J., 2003: Linking nonlinearity and non-Gaussianity of planetary wave behavior by the Fokker-Planck equation. *J. Atmos. Sci.*, **62**, 2098-2117.
- Branstator, G., and J. Berner, 2005: Linear and nonlinear signatures in the planetary wave dynamics of an AGCM: Phase space tendencies. *J. Atmos. Sci.*, **62**, 1792-1811.
- Kalney, E., 2003: *Atmospheric modeling, data assimilation, and predictability*. Cambridge University Press, 341 pp.
- Kimoto, M., and M. Ghil, 1993: Multiple flow regimes in the Northern-Hemisphere winter. I. Methodology and hemispheric regimes. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2625-2643.
- Lorenz, E. N., 1965: A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, **17**, 321-333.
- Mukougawa, H., and M. Hayashi, 2009: On the influence of tropical intraseasonal oscillation on the predictability of PNA pattern. *Annuals of Disas. Prev. Res. Inst.*, **52B**, 413-419 (in Japanese).
- Newman, M., P. D. Sardeshmukh, C. R. Winkler, and J. S. Whitaker, 2003: A study of subseasonal predictability. *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 1715-1732.
- Sura, P., M. Newman, C. Penland, and P. Sardeshmukh, 2005: Multiplicative noise and non-gaussianity: A paradigm for atmospheric regimes? *J. Atmos. Sci.*, **62**, 1391-1409.
- Tang, Y., H. Lin, J. Derome, and M. K. Tippett, 2007: A predictability measure applied to seasonal predictions of the Arctic Oscillation. *J. Climate*, **20**, 4733-4750.