令和３年度地球惑星科学専攻（地球物理学分野）修士論文

アンサンブル手法を用いた熱帯低気圧進路の予測可能性及びデータ同化手法に関する研究

京都大学大学院　理学研究科
地球惑星科学専攻　地球物理学分野　大気科学分科
中下早織

要旨

本研究ではアンサンブル手法を用いて，熱帯低気圧進路の予測可能性に関する事例解析と，衛星観測を念頭に置いたデータ同化手法間の比較を行った．

まず, アンサンブル予報を用いて 2019 年台風第 19 号の進路の予測可能性を解析した．気象庁の予報は，上陸 3 日前まで精度良く上陸位置を予報できていた．他センターの予報と比較したところ，台風の進行速度を他センターほど過小評価していなかったためであることが分かった．しかし気象庁による予報の上陸位置は上陸 3 日前に大きく西偏した．誤差の要因を明らかにするためアンサンブル感度解析を行い，上陸位置に感度が高い台風南東のリッジを特定した．このリッジが弱く予報されていたために，リッジの南東で発達中であった低気圧性擾乱の西進が早まり，台風を西にずらしたことが示唆された．さらに，アンサンブル感度解析で求めた摂動を気象庁の全球数値予報モデルに加えた実験を行ったところ，台風の進路は感度解析と整合的に変化した．以上の事例解析から，アンサンブル感度解析が予報誤差の力学的要因を特定できることが確認されるとともに，熱帯低気圧の進路予報における亜熱帯環境場の重要性が示唆された．

次に，熱帯・亜熱帯大気場の再現性向上のために重要となる衛星観測の同化に適した手法を特定するため，理想化実験を行いアンサンブルデータ同化手法間で精度を比較した．まず衛星観測の非線形性に着目して，アンサンブルカルマンフィルタと変分法に基づく最尤法アンサンブルフィルタ（MLEF）の性能を比較し，MLEF が強い非線形性に対して高い精度を示すことと，線形近似された観測演算子よりも非線形観測演算子の方が強い非線形観測に対して有効であることを示した．一方で不連続点を含む観測に対する精度は先行研究が主張するほど高くなかったが，その原因は非線形演算子が最適化の収束性を悪化させるためであることがわかった．

さらに，アンサンブル同化手法におけるサンプル数不足を補い偽相関を除くことで精度を向上させるために重要な局所化を MLEF に対して定式化した．考案した手法は並列計算が可能であり，従来の局所化手法よりも非線形観測に対する精度が高かった．以上の結果は，MLEF が非線形観測に適していることと，考案した局所化により非線形観測を含む高次元問題に対応できる可能性を示しており，台風の予測精度向上につながるものである．

本研究は，熱帯低気圧の進路誤差に対して新たなメカニズムを見出したとともに，データ同化手法の改良により予報精度向上をもたらしうる独自の局所化手法を考案した．

目次

図目次

表目次

第 1 章

序論

台風は社会的に最も注目される自然現象の一つであり，気象庁は 2030 年に向けた数値予報技術開発目標の柱の一つとして，台風の数日先の進路予報精度向上を目指している．台風に発達する熱帯低気圧の進路予報精度は年々改善しているが，初期値のわずかな違いで精度が急激に変化する事例が存在する．

1.1 熱帯低気圧進路の予測可能性に亜熱帯大気場が与える影響

熱帯低気圧の進路の予測可能性を理解するためには，進路予報誤差の要因を予報に用いられる数値モデルに起因するものと予報の初期値に起因するものに分けることが重要である．Yamaguchi et al. (2012) では 2009 年に北西太平洋で発達した熱帯低気圧を対象として気象庁の数値予報モデルと欧州中期予報センター（ECMWF）の初期値を用いたシミュレーションを行い，初期値の入れ替えによって進路予報誤差が平均約 10 % 減少することを示した．一方で初期値の入れ替えによって精度改善が見られなかった（予報誤差がモデルに起因する）事例では，アンサンブル予報のばらつきが小さく，モデルが系統的に誤差を生じさせていることを示唆した．Miyachi and Enomoto (2021) では，同じ 2009 年の熱帯低気圧に対して米国国立環境予測センター（NCEP）の予報モデルを用いた 3 センターでの比較を行い，Yamaguchi et al. (2012) の結果と同様に初期値の入れ替えが予報精度に影響を与えることを示すとともに，台風自体の構造よりも周辺環境場の変化の方が進路の変化への寄与が大きいことを示した．筆者らも Nakashita and Enomoto (2021)（以下 NE21）において，2019 年台風第 19 号の進路予報誤差の要因をアンサンブル感度解析を用いて調べ，初期時刻の違いによる予報精度の違いが台風南東の熱帯擾乱に起因することを示唆した（第 3 章）．これらの研究は，熱帯低気圧進路予報に対する亜熱帯環境場の重要性を示している．

1.1.1　熱帯・亜熱帯域における熱帯低気圧進路の予報誤差要因

熱帯低気圧の進路は主に環境場の指向流によって決まる (Chan and Gray, 1982) ことはよく知られているが，指向流を定める大規模な大気構造が明確に存在する中緯度帯と異なり，熱帯・亜熱帯では指向流が必ずしも明確に存在しない．そのため，熱帯低気圧自身が惑星渦度を移流することにより生じる二次的な流れ (βジャイア， Rossby, 1948) や，背景場の水平風の鉛直シアーに伴って生じる偏った非断熱加熱 (Wu and Wang, 2001) などが進路決定要因として注目されてきた．

Carr and Elsberry (2000) では，1997 年に北西太平洋で発生した熱帯低気圧を対象として，米国海軍全球大気予報システム（Navy Operational Global Atmospheric Prediction System: NOGAPS）と米国地球流体研究所（Geophysical Fluid Dynamics Laboratory: GFDL）の領域ハリケーンモデルの両方で 72 時間予報の進路誤差が 555 km を超えた事例を抽出し，転向前の熱帯・亜熱帯域に着目して誤差要因の解析を行った．特定された誤差要因の概要を以下に示す．

1. 2 つの熱帯低気圧の直接的な相互作用（図 1.1(i)）
   2 つの低気圧中心同士を結ぶ軸が反時計回りに回転する．対象事例の中で最も多かった要因である（全 119 事例のうち 70 事例）．熱帯低気圧それぞれのサイズを大きく予報する，または低気圧間の距離を小さく予報することが原因で起こる．
2. 2 つの熱帯低気圧の間接的な相互作用（図 1.1(ii)）
   熱帯低気圧の東（図 1.1(ii) 上の C）または西（図 1.1(ii) 下の C）に位置する低気圧性循環の強度を過大または過小評価するために，この低気圧性循環によって励起される高気圧性循環の強度が変わり，熱帯低気圧進路に影響を与える．高気圧性循環の励起は順圧 β 平面ではロスビー波の分散で説明できる (Carr and Elsberry, 1997).
3. 熱帯低気圧によるリッジの強化（弱化）（図 1.1(iii)）
   北西向きに連なるロスビー波列内に熱帯低気圧が位置する場合に，北西の低気圧の強度を過大評価することが原因でロスビー波の南東向きのエネルギー伝播が強まる．これにより熱帯低気圧を実際より早く発達させるとともに，その南東の高気圧性循環を強めて指向流を北偏させる．
4. 逆転トラフの形成（図 1.1(iv)）
   2 つの熱帯低気圧がおおよそ同緯度に並んでいるときに，ロスビー波の分散によって生じる高気圧性循環が重なり合い強化される．熱帯低気圧はこの循環に沿った進路を取り，モンスーントラフと逆向きの走向を持つトラフを形成する．

上の 3，4 のように，彼らは環境場の影響にも言及しているが，彼らの用いた事例では 2

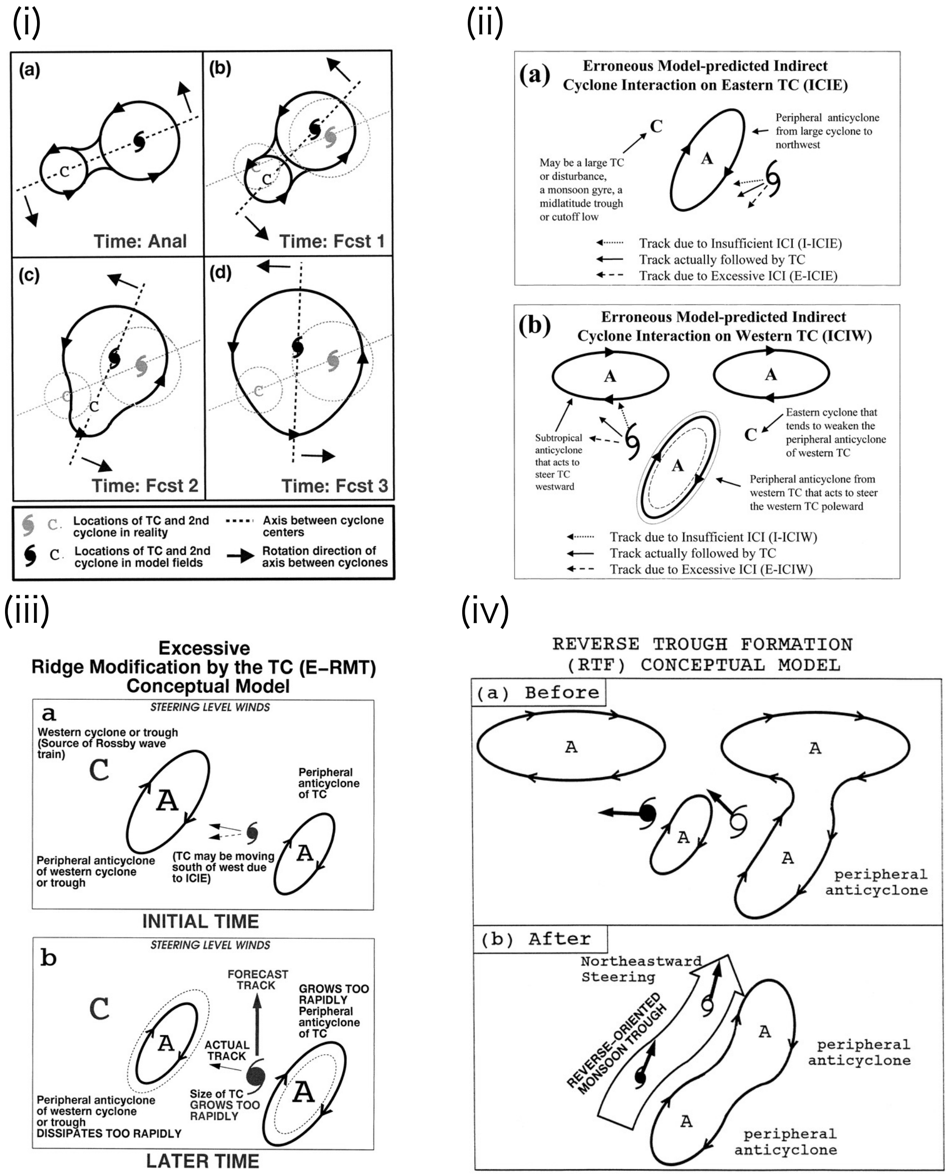

図 1.1: 熱帯低気圧の進路予報誤差要因の概念モデル．(i) 直接的相互作用，(ii) 間接的相互作用，(iii) リッジの強化（弱化），(iv) 逆転トラフの形成を表す．それぞれ Carr and Elsberry (2000) Figure 2, 5, 7, 10

つの熱帯低気圧間の相互作用による誤差が圧倒的に多かったために相互作用に影響を与える熱帯低気圧自身の強度やサイズの予報精度に重きが置かれていた．しかし近年数値モデルの精緻化，高解像度化に伴い，強度予測の誤差は年々減少している．そのため，最新のモデルを用いた進路予測での誤差要因にはこれまで重要性が低いとされてきた要因の寄与が大きくなっていると考えられる (Ito et al., 2020)．近年では地形からの影響 (Lin et al., 2016)，大気海洋相互作用 (Katsube and Inatsu, 2016) の重要性も事例研究を通して示されている．従って，現代の予報モデルに即し，進路予報誤差要因を改めて包括的に理解することが求められている．

1.1.2　アンサンブル感度解析を用いた予報誤差要因の特定

NE21では，アンサンブル感度解析によって力学的な予報誤差要因を示唆した．感度解析とは，対象とする時刻において予報誤差が最も発達するような予報初期時刻の摂動を求める解析手法である．その特徴を活かして，予測可能性の研究の他にアンサンブル予報の初期摂動の作成や，追加観測を与える領域の決定（適応観測）に応用されている．感度解析には初期時刻の微小摂動に対する予報誤差の変化から最も予報誤差に影響を与えうる初期摂動を特定する随伴法 (Le Dimet and Talagrand, 1986) や，接線形モデルの特異値分解から最も成長率の大きい方向を特定する特異ベクトル法 (Buizza and Palmer, 1995) などがある．どちらの手法も随伴モデルや接線形モデルを必要とするためモデルに依存し，また計算コストも高い．しかしアンサンブル予報を利用した感度解析手法では，すでに計算された予報値を使って解析を行うため計算コストを大幅に減らすことができることに加え，異なるモデル間での特性比較も簡単に行うことができる．本研究で用いたアンサンブル感度解析手法の詳細については第 2.2.3 節で述べる．

NE21と同様にアンサンブル感度解析を熱帯低気圧進路の予測可能性研究に応用した例として，Torn et al. (2018) では，指向流の分流域に位置しており進路の不確実性が大きかった熱帯低気圧事例に着目して，アンサンブル随伴感度解析 (Ancell and Hakim, 2007) によって進路予報に影響を与える要因の特定を試みた．彼らは Lionrock (2016) の事例（図 1.2(i)）で ECMWF のアンサンブル予報に感度解析を適用し，72 時間予報の位置のばらつきが台風の北東に位置するトラフに伴う南東風（図 1.2(ii)）と台風北側の 500 hPa 高度摂動の双極構造（図 1.2(iii)）に起因することを示した．彼らは指向流に着目していたが，Ito and Wu (2013) では台風の位置に着目したアンサンブル感度解析を考案し，環境場の誤差要因を特定できることを示している．

このように，アンサンブル感度解析と力学的解釈を組み合わせることで，熱帯低気圧進路に影響を及ぼす要因を特定することができる．

1.1.3　熱帯大気場の再現性

アンサンブル感度解析の結果を正しく解釈するためには，熱帯・亜熱帯の大気場をなるべく正確に再現した解析値と組み合わせることが重要となる．しかし，大気場の解析でよく用いられる再解析データは熱帯の再現性に課題を持つことが知られている．例えば Murakami (2014) では，気象庁の JRA-25 と JRA-55，ECMWF の ERA-40 と ERA-Interim，NCEP の CFSR，NASA の MERRA を対象に，熱帯低気圧の発生数と強度，及び時間変動を調査した（図 1.3)．解像度の高い CFSR や MERRA は他のデータと比較して熱帯低気圧強度の過小評価傾向を緩和するが，発生頻度や的中率で比較すると JRA-55 が最も再現性が高い．この要因は，熱帯低気圧周辺の風速観測の利用であると指

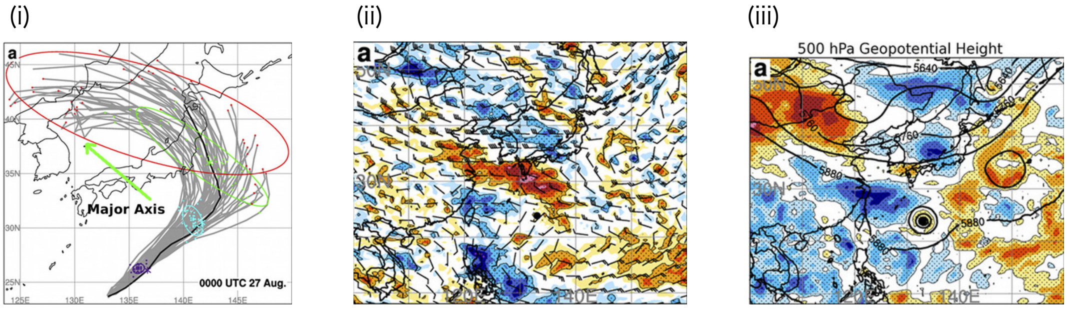

図 1.2: (i) Lionrock (2016) の 2016 年 8 月 27 日 00 UTC 初期値のアンサンブル予報進路．紫の点が 24 時間予報，水色が 48 時間予報，黄緑色が 72 時間予報，赤色が 96 時間予報の位置を表し，各色の楕円の長軸が最もメンバー間の位置のばらつきが大きい方向（主軸）を表す．72 時間予報の主軸を矢印で示す．(ii) 72 時間予報の主軸方向の中心位置のずれが持つ，予報初期時刻の指向流の主軸方向成分に対する感度（陰影）．数値は指向流が 1 標準偏差変化した時に台風位置が主軸に沿って北西方向に動く距離を表す．等値線は 60 m ごとで，実線で囲まれたハッチ付きの領域は統計的に 95% 以上有意な領域を示す．赤系統が正，青系統が負の感度を示す．矢羽はアンサンブル平均の指向流を示し，黒点は台風位置を示す．(iii) (ii) と同様，ただし予報初期時刻の 500 hPa 高度に対する感度．黒線はアンサンブル平均の高度を示す．それぞれ Torn et al. (2018) Figure 6(a), 14(a), 15(a) より引用．

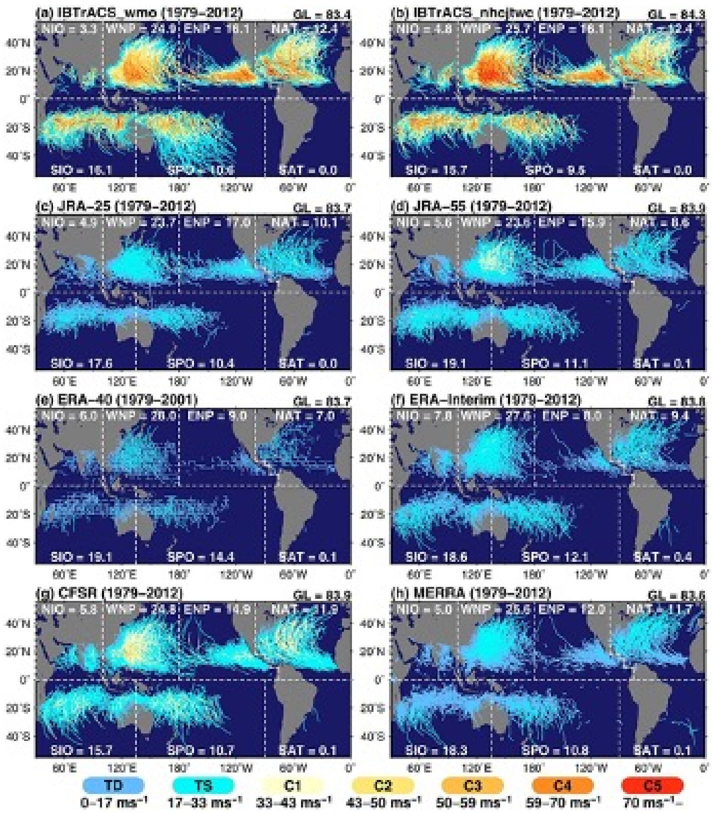

図 1.3: 1979–2012 年における熱帯低気圧進路の全球分布．(a,b) は観測，(c–h) は再解析データによる分布であり，(c) JRA-25, (d) JRA-55, (e) ERA-40, (f) ERA-Interim, (g) CFSR, (h) MERRA を示す．各領域内及び図右上の数字は年平均の発生数を表し，熱帯低気圧強度に応じて色分けされている．Murakami (2014) Figure 1 より引用．

摘されている．新しい再解析データを用いた比較でも，解像度の高さと熱帯低気圧の再現性は必ずしも比例しないことが報告されている (Malakar et al., 2020).

1.2 衛星観測の同化に伴う課題

熱帯大気場の再現性向上には，解析値を作成するデータ同化システムにおいて観測を適切に利用することが有効であるが，大部分を海が占める熱帯ではラジオゾンデによる高層観測やレーダーによる地上観測などの従来型観測が十分に得られない．そこで海陸問わず時空間的に密な観測が得られる衛星による観測を利用することが望ましい．衛星観測を新たに同化することによって，熱帯低気圧の雲構造や降水構造の再現精度が向上すること (Wu et al., 2019)，メソスケールの大気場の再現精度向上が期待できること (Ying and Zhang, 2018) が報告されている．しかし，衛星観測の同化には多くの課題がある．衛星による観測の特徴は,

1. 数値モデルが扱う要素（予報変数）と観測される要素が異なり
2. 観測位置が定義できない観測（鉛直に積算した量等）が含まれる

ことである．これらの特徴に関連した課題を取り上げる．

1.2.1 非線形観測

データ同化で観測を適切に取り扱うには，観測要素と予報変数を結びつける観測演算子が必要となる．この観測演算子は,

1. モデルの格子点（予報時刻）から観測位置（観測時刻）への（時）空間内挿（観測要素が積算量の場合は積算）
2. 予報変数から観測要素への変換

の 2 つの役割を担う．1 つ目は線形変換だが，2 つ目の変数変換には強い非線形性が含まれる場合がある．例えば，衛星放射輝度と輝度温度の変換を表すシュテファン・ボルツマンの法則

$$\alpha = \sigma T^4 \tag{1.1}$$

(α は放射輝度，T は輝度温度，σ はシュテファン・ボルツマン定数）は 4 次の非線形変換である．より簡単な例でも，風向と風速の観測から東西成分と南北成分を求めるとき

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{u}|\cos\theta \\ |\mathbf{u}|\sin\theta \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

($\mathbf{u} = (u, v)$ は風ベクトル，θ は風向）にも非線形変換が行われる (Julier and Uhlmann, 2004)．データ同化理論は元々線形または弱い非線形のモデル，観測演算子を仮定してい

るため，このような強い非線形性を含む観測は近似的にしか扱うことができない．コスト関数の最適化によって解析値を求める変分法では，非線形の観測演算子を用いてコスト関数を定義することができる．しかし，特に雲や降水に関連する観測（輝度温度，レーダー反射強度，放射フラックスなど）を同化する際に，積雲パラメタリゼーションや水の相変化によって観測演算子に不連続性が生じ，微分可能な関数を想定している数値最適化の収束性が悪化することが指摘されている (Lopez, 2007; Errico et al., 2007)．Zhang et al. (2000) ではコスト関数に積雲パラメタリゼーションに伴う不連続点が含まれる場合の 4 次元変分法同化を想定して，微分不可能な関数に対する最適化手法である Bundle 法と微分可能な関数を想定した準ニュートン法（L-BFGS）を不連続点を含む関数の最適化問題に対して適用し，L-BFGS が求解に失敗する場合でも Bundle 法では最適値を求められることを示した．しかし Bundle 法は多数の勾配を必要とするため計算コストが L-BFGS の数倍大きく，現業機関での 4 次元変分法のような大規模問題への適用は難しい．現業では不連続点の近辺で局所的に連続になるようにスムージングをかける操作が行われることもある (Županski and Mesinger, 1995; Tsuyuki, 1997) が，スムージングは最適化する関数を変えてしまうため Zhang et al. (2000) では本来の最適値ではない解に収束してしまうケースがあることも示された．

データ同化における線形性の仮定は，近年主流となってきているアンサンブル予報を利用したデータ同化手法（アンサンブル同化手法）を用いると緩和することができる．アンサンブル同化は，現実大気モデルで巨大なサイズとなる背景（予報）誤差共分散をモンテカルロ法で近似することで，メモリと計算コストを削減するために考案された手法であるが，観測演算子の線形近似を避けることもできる (Lorenc, 2003)．さらにアンサンブルと変分法のアプローチを組み合わせることで，観測演算子やモデルの微分可能性を仮定しない同化スキームを構築することができる (Zupanski et al., 2008)．

Bowler et al. (2013) では風の東西・南北成分 (u, v) を予報変数として，一つずつ観測を同化するアンサンブルカルマンフィルタを用いて風速を同化する理想実験を行い，非線形観測に対する振る舞いを検証した（図 1.4）．アンサンブルは 1000 メンバーで，同化前は $(u, v) = (2\ \mathrm{m/s}, 4\ \mathrm{m/s})$ を中心に標準偏差 2 m/s のガウス分布に従って分布している（図 1.4 (i)）．観測された風速が 3 m/s（観測誤差標準偏差 0.3 m/s）であった時，観測演算子の線形近似をせずに同化すると図 1.4 (ii) のように大半のアンサンブルメンバーは観測値から ± 1 標準偏差離れた領域内（図の円環内）に収まるが，大きく外れるメンバーも存在する．彼らはこの原因について，非線形演算子を用いて線形近似を避ける定式化はアンサンブル平均に対して観測演算子を線形化する定式化とほぼ同じ結果を与え，今回の実験のように大きくばらついた予報アンサンブルに対して同化する場合には各メンバーが持つ共分散の情報を反映できないためであると説明している．そのため彼らは代わりに各アンサンブルメンバーの状態に対して線形化した演算子を用いることで，局所的な非線形性をより正確に評価できると主張した（図 1.4 (iii)）．しかし図 1.4 (i) と (iii) を比べると，

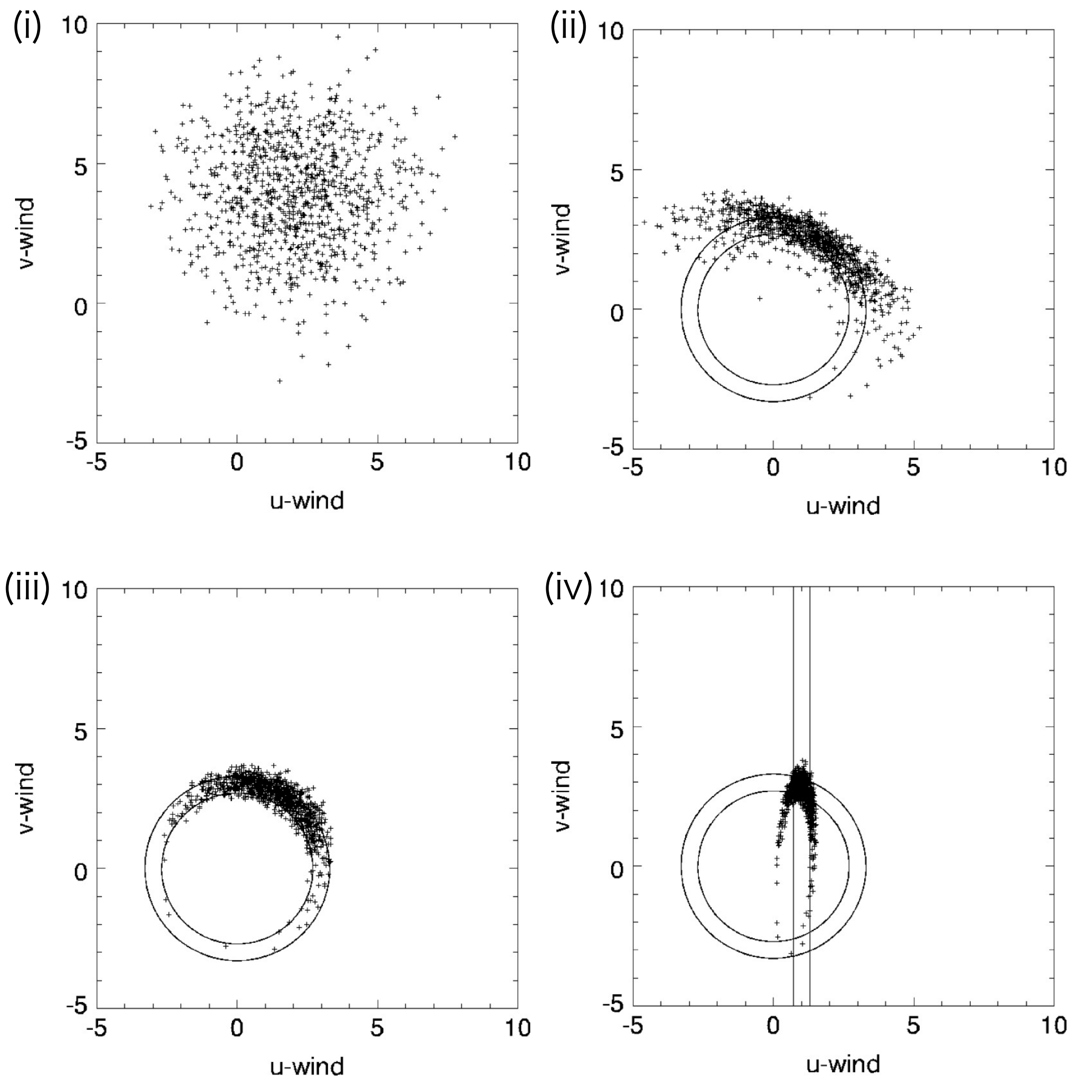

図 1.4: 単一風速観測を同化する理想化実験．(i) 同化する前，(ii) 同化後のアンサンブルの分布，(iii) 各アンサンブルごとに線形化した観測演算子を用いて同化した後のアンサンブルの分布．(iv) 風速の同化後に東西成分の観測を同化した後のアンサンブル分布，横軸が風速の東西成分，縦軸が南北成分を表す．(i),(ii) は Bowler et al. (2013) Figure 8 より，(iii) は Figure 9 より，(iv) は Figure 10 より引用.

同化後のアンサンブルの分布が大きくガウス分布から離れていることがわかる．データ同化手法は予報や観測の誤差がガウス分布に従う，もしくはその分布がガウス分布に近いことを仮定しているため，このようにガウス分布から離れた予報アンサンブルを今後の同化に用いると，他の観測の同化に悪影響を及ぼすおそれがある（図 1.4 (iv)）．またこのような線形近似が不連続な演算子に対しても有効かどうかは，風速同化実験からは明らかでない．

このようにアンサンブル同化手法は非線形性を含む衛星観測の同化に適していることが期待されるが，アンサンブル同化手法には様々な種類が存在し，どの手法が最も非線形観測に適しているかは明らかでない．また非線形観測の同化に伴う非ガウス性はデータ同化

にとって重要な課題であり，非ガウス分布に対する同化手法である粒子フィルタの研究が盛んに行われているが，粒子フィルタで最適な同化性能を得るにはアンサンブルカルマンフィルタ等と比較して非常に多くのアンサンブル数を必要とする．本研究ではガウス分布を仮定した同化手法において，限られたアンサンブル数で精度良く非線形観測を扱える手法の特定に焦点を当てる．

1.2.2 アンサンブル同化における局所化

アンサンブル同化ではアンサンブル予報をもとに解析値を求めるが，通常アンサンブル予報のメンバー数は予報モデルの変数次元（格子点数と予報変数の数の積）よりもはるかに小さいため，近似した背景誤差において特に遠隔の変数どうしの間に偽相関が生じることがある（サンプリング誤差）．アンサンブルで推定される誤差共分散のうち相関を表す非対角成分は，相関をとる要素間の地理的距離が大きくなるほど正しい相関の情報（シグナル）よりも誤差（ノイズ）に支配される (Hamill et al., 2001)．また大気場全体のうち，大きな誤差成長率を持つ局所領域に注目すると，その領域の自由度（支配的なモード）は領域内の状態変数次元よりもはるかに小さい (Patil et al., 2001)．従って，誤差共分散の情報を注目する格子点近傍にのみ限定し，遠隔の観測の影響を直接または間接的に制限することで，少ないアンサンブル数でも効果的に同化できることが期待される．この考えに基づき，相関を表す誤差共分散の非対角成分を直接落としたり，近傍の観測のみを用いて同化を行い遠隔からの影響を取り除いたりする操作を局所化（localization）という (Houtekamer and Mitchell, 2001)．前者の局所化手法はモデル空間局所化，後者の方法は観測空間局所化と呼ばれる．

図 1.5 にサンプリング誤差とモデル空間局所化の例を示す (Bishop et al., 2017)．図 1.5 (i) は，鉛直 1 次元を 100 層に差分化した予報変数に対する誤差共分散を想定した行列である．この誤差共分散に従う平均 0 のサンプルを 10 個抽出し，それらのサンプル誤差共分散から真の誤差共分散を推定したものが図 1.5 (ii) である．特に本来ほとんど 0 である非対角成分にノイズが目立つことがわかる．この例では，非対角成分は異なる位置にある変数間の相関を表しており，このノイズは偽の相関が現れていることを示す．この誤差を緩和するために，図 1.5 (iii) のような，対角成分が 1 で対角から離れるほど要素が 0 に近づくような局所化行列を考える．この局所化行列（図 1.5 (iii)）と元のサンプル共分散（図 1.5 (ii)）との要素積をとって局所化を実行した行列が図 1.5 (iv) である．非対角成分のノイズが抑えられたことで，より真の共分散（図 1.5 (i)）に近い構造を示していることがわかる．この例に基づく理想化実験については第 6 章で詳しく述べる．

局所化はアンサンブル同化手法の弱点を補い性能を高めるため，数値天気予報のような高次元問題に適用する上で重要な手法となっており，現在に至るまで盛んに研究されている．しかし局所化を衛星観測のように強非線形かつ積算型の観測同化に適用する場合，局

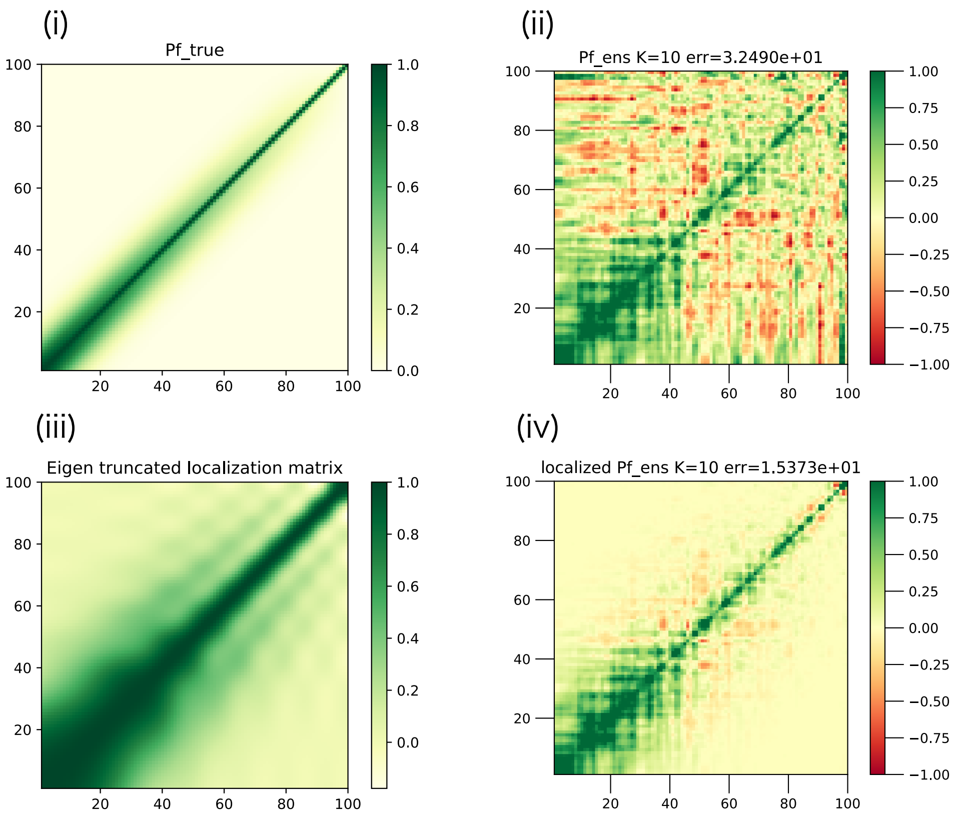

図 1.5: 背景誤差共分散のサンプリング誤差と局所化の例．(i) 真の背景誤差共分散，(ii) 10 メンバーのアンサンブルを用いて近似した背景誤差共分散，(iii) 局所化行列，(iv) (iii) の局所化行列と (ii) の要素積をとった行列．図の上の err は真の共分散と推定共分散の差のフロベニウスノルムを示している．

所化手法の選択によって性能に影響が現れることが知られている．

1.2.2.1　局所化と積算型観測

現実的な高次元問題を扱う場合，モデル空間局所化と観測空間局所化のうち計算コストの観点からより並列化性能に優れた観測空間局所化が用いられることが多い．しかし衛星観測に多い鉛直積算型の観測に対しては観測の位置が正確に定義されないため，観測とモデル格子点間の距離を利用する観測空間局所化は適用が難しい．そのため積算型観測に対する局所化はモデル空間が適していると考えられている (Campbell et al., 2010; Lei et al., 2018; Zupanski, 2021)．一方で，問題設定によっては観測空間局所化の優位性を指摘する先行研究も存在する．例えば Lei and Whitaker (2015) では，モデル空間局所化を用いて衛星放射輝度を同化する場合に，局所化を強くかけると気温に与えられる修正量の符号が反転する現象を発見し，鉛直 1 次元の理想化モデルを用いた説明を行った (図 1.6)．異なる位置の気温どうしで負の相関を持つ場合，モデル空間局所化で本来の負の相関が打ち消されてしまい，局所化をしない場合よりも解析値を改悪してしまう（図 1.6 (b)）．この結果は，モデル空間局所化では背景誤差の相関がシグナルであるかノイズ

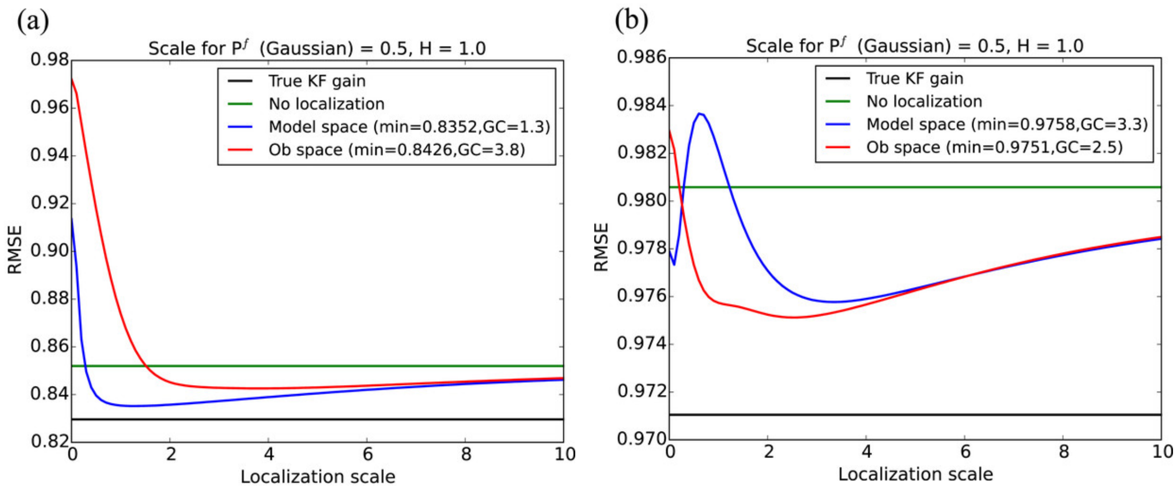

図 1.6: 鉛直 1 次元の理想化モデルを用いて衛星放射輝度を想定した積算型観測を同化した場合の解析誤差．横軸は局所化半径であり，小さくなるほど局所化を強くかけることを意味する．黒線はアンサンブルでないカルマンフィルタを用いて同化した場合の解析誤差であり，他の色の線は黒線に近いほど高精度であることを意味する．緑は局所化なし，青はモデル空間局所化，赤は観測空間局所化を実装した場合の解析誤差を示す．(a) 背景誤差が全て非負の相関を持つ設定，(b) 背景誤差に負の相関が含まれる設定での結果を表す．Lei and Whitaker (2015) Figure 4 より引用．

かを正しく判断することの重要性を示唆している．また，最近の研究では観測空間局所化の局所化半径を動的に推定することで，衛星放射輝度を適切に同化することができるという結果も報告されている (Lei et al., 2020)．従って，どちらの局所化手法が優位かに対する一般的な結論は得られていない．

1.2.2.2 局所化に伴う非線形性の扱い

アンサンブル同化における局所化手法の研究は盛んに行われているが，非線形観測との関係を扱った研究は少ない．アンサンブル変分法で非線形性を正確に評価しようとする場合，コスト関数の最小値探索の各ステップでアンサンブル数と同じ回数だけ観測演算子の評価を行う必要がある．モデル空間局所化を行うと実質的にアンサンブル数を増やすことになり，最小値探索の計算コストがその分増大する．一方，観測空間局所化は解析インクリメントの作成に用いるアンサンブル結合係数を各空間格子点で評価することにあたり，局所化をしない場合のコスト関数の最適化を格子点数だけ行うことになる．これは一見モデル空間局所化よりも計算コストが増大するように思われるが，並列計算機とうまく組み合わせれば計算時間の増大をある程度抑えることができる．しかし非線形性を考慮する場合，近傍の格子点におけるアンサンブル結合係数どうしが相関を持つため，コスト関数最適化を個々の格子点で完全に独立に行うことができず，並列実装による効率化が難しくなる．

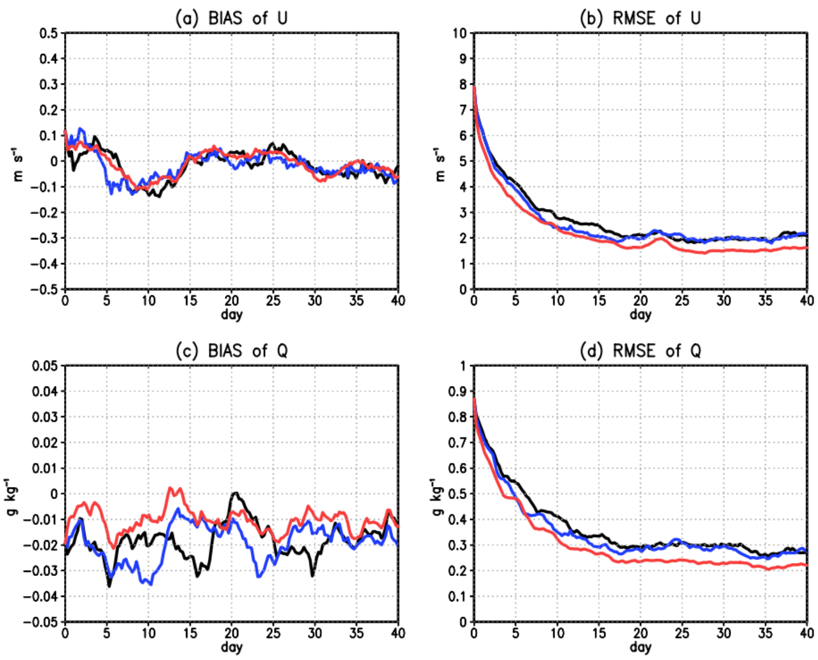

図 1.7: 観測システムシミュレーション実験における 6 時間予報値の東西風（m/s）の (a) バイアスと (b) 二乗平均平方根誤差，比湿（g/kg）の (c) バイアスと (d) 二乗平均平方根誤差．黒が LETKF，赤が EnVar，青が線形観測演算子を用いた EnVar の結果を示す．Yokota et al. (2016) Fig. 4 より引用

Yokota et al. (2016) では，観測空間局所化を用いたアンサンブルカルマンフィルタである LETKF と観測空間局所化を用いたアンサンブル変分法（EnVar）を低解像度全球モデルを用いた同化実験によって比較した．彼らは実験から，非線形観測である比湿を同化した場合に EnVar が LETKF の解析精度を上回ることを示した（図 1.7）．しかし EnVar の計算コストは LETKF の数倍になると述べられており，より高解像度のモデルに適用する場合このコストの差は致命的になる．

前述したように観測空間局所化では格子点ごとに独立に結合係数を求めることになるが，観測密度が低い場合や局所化半径を大きくとった場合には結合係数の空間分布が滑らかになることが知られている (Kotsuki et al., 2020, 図 1.8)．これを利用して，観測空間局所化では粗い格子で計算した結合係数を高解像度の格子に内挿する手法（Weight Interpolation）が提案されている (Yang et al., 2009; Kotsuki et al., 2020)．結合係数が滑らかに分布することにより，ある格子点に同化する観測が位置する範囲内において，結合係数が一定であるという仮定を置くことができると考えられる．この仮定を置くと，非線形観測演算子を正確に評価しつつ格子点ごとに独立に解析を行えるようになる．本研究では結合係数一定の仮定を置いた同化手法を実装し，従来手法との比較を行う．考案した手法の詳細は第 4.5 節で述べる．

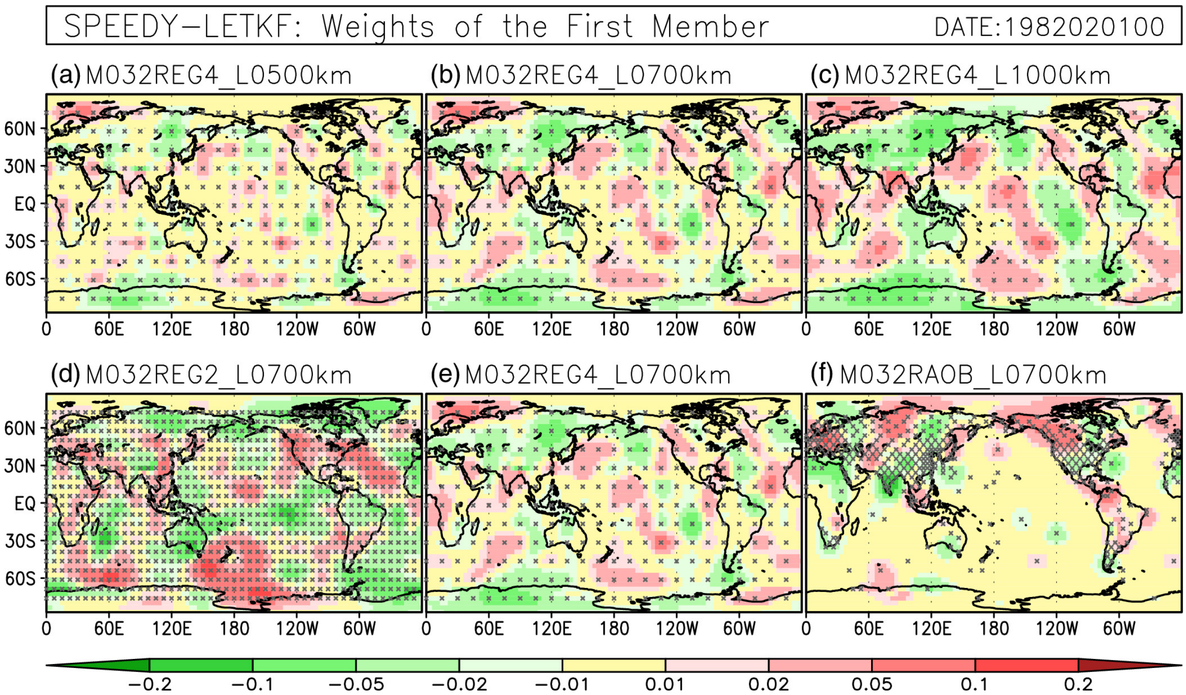

図 1.8: 1 番目のアンサンブルメンバーの重み係数の空間分布．(a–c) は局所化半径をそれぞれ 500 km，700 km，1000 km とした場合．(d–f) は観測分布（図の灰色の x 印）を変えた場合．Kotsuki et al. (2020) Figure 4 より引用

1.3 本研究の目的

熱帯低気圧進路の予報精度向上のためには，熱帯低気圧進路の予測可能性に熱帯・亜熱帯環境場が与える影響を現代の枠組みで特定し，そのメカニズムを理解することが求められている．NE21 ではアンサンブル感度解析が予報誤差要因の特定に有用であることを示したが，感度解析から得られた要因に力学的な解釈を与えるためには，正確に熱帯・亜熱帯の大気場を再現した解析値と組み合わせることが重要となる．現在用いられている再解析データでは熱帯・亜熱帯の再現性に課題があること，近年ますます利用が増える衛星観測の同化が熱帯域の解析精度にインパクトがあることを考慮して，本研究は衛星による観測の特徴である非線形性と非局所性に適した同化手法の特定を目的とする．本研究では非線形性のあるモデルや観測に適していると期待される最尤法アンサンブルフィルタ (Zupanski, 2005) に注目し，他の同化手法と比較してその特性を把握する．また最尤法アンサンブルフィルタにモデル空間局所化と観測空間局所化を導入し，現実の衛星観測に近い状況を想定した理想化実験によってその性能を調査する．さらに観測空間局所化に関して非線形性を適切に評価しつつ並列化性能を高めた同化手法を考案し，その性能を従来手法と比較する．

本修士論文の構成は以下の通りである．第 I 部では第 II 部の着想につながった 2019 年

台風第 19 号の進路の予測可能性に関する研究を取り上げる．第 2 章で使用データと解析手法および使用モデルの説明をし，第 3 章で主要予報センター間での進路予報精度比較と気象庁の進路予報精度悪化の要因解析（NE21），及び気象庁の全球モデルを用いた再予報実験を行う．次に第 II 部では衛星観測の同化を念頭に置いたアンサンブル同化手法間の比較を行う．第 4 章で同化手法の解説をするとともに，最尤法アンサンブルフィルタに対する局所化を導出する．第 5 章では非線形観測に対するアンサンブル同化手法の性能を比較する．第 6 章では局所化を導入した最尤法アンサンブルフィルタの性能を非線形及び積算型の観測同化によって検証する．最後に第 7 章で本研究をまとめる．

第Ⅰ部

熱帯低気圧進路の予測可能性

第 2 章

使用した手法

この章では第 3 章の解析で用いたデータと解析手法，及び使用したモデルについて説明する．

2.1 使用したデータ

	ECMWF	NCEP	UKMO	JMA
水平解像度	Tco639[1]	C384[2]	$0.187° \times 0.28125°$	TL479[3]
	（約 16 km）	（約 25 km）	（約 21 km）	（約 40 km）
鉛直解像度	91 層	64 層	70 層	100 層
予報期間	15 日	16 日	7.25 日	11 日
アンサンブル数	51	21	18	27

[1] T=三角形波数切断，c=三次格子，o=正八面体格子 [2] C=正六面体格子 [3] L=一次格子

表 2.1: 2019 年 10 月当時の各センターのアンサンブル予報システムの概要

予報データとして，欧州中期予報センター（ECMWF），米国国立環境予測センター（NCEP），英国王立気象局（UKMO），気象庁（JMA）の 4 センターのアンサンブル予報値を用いた．利用した 2019 年当時の各センターの予報モデルの概要を表 2.1 に示す．予報値は ECMWF が提供する TIGGE データベース[*1] より，時間解像度を 6 時間，水平解像度を $0.5° \times 0.5°$ の等緯度等経度格子に統一して取得した．台風中心位置は後述する方法で海面気圧データのみから計算し，その他の地表面データ以外のデータは必要に応じて等圧面（850，500，300 hPa）上に内挿して用いている．第 3 章では，特に断らない限りアンサンブル平均を用いて解析を行う．なお，気象庁に関しては高解像度の決定論予報とアンサンブル予報平均で進路に大きな差がないことを確認している．

[*1] `https://confluence.ecmwf.int/display/TIGGE`

台風の位置と強度の実況値として，気象庁ベストトラックデータを用いた．本研究では予報時刻に合わせて 00，06，12，18 UTC のデータのみを使用している．また降水量の参照値として，気象庁の全国合成レーダー GPV*2の降水強度を用いた．レーダー降水強度は 10 分ごとに提供されている．データは京都大学生存圏研究所の生存圏データベース*3 より取得した．

解析値として, NASA が提供する再解析データ MERRA-2 (Modern-Era Retrospective analysis for Research and Applications version 2, Gelaro et al., 2017) の 3 時間平均値を用いた．MERRA-2 を使用したのは，時間解像度が十分に細かく，また対流活動の指標となりうる湿潤加熱を示す変数を含んでいたためである．予報時刻に対応する値は前後の 3 時間平均値の平均をとって求めている．MERRA-2 の概要を表 2.2 に示す．

水平解像度	0.625° × 0.5°
鉛直解像度	モデル面 72 層，気圧面 42 層
出力時刻	00–03, 03–06, 06–09, 09–12, 12–15, 15–18, 18–21, 21–24 UTC の平均
使用変数	海面気圧，風速（等圧面），湿潤加熱による気温変化率

表 2.2: 使用した MERRA-2 の概要

2.2 熱帯低気圧進路の解析手法

この節では第 3 章の解析に用いた手法について記す．なお各解析手法の詳細については Appendix A に記す.

2.2.1 中心位置のトラッキング

台風中心は海面気圧が極小値を取る位置として，海面気圧の格子点データから放物面近似を用いて極小位置を求める．極小位置の探索アルゴリズムは以下のような手順で行う．

1. ベストトラックの中心位置の近傍で海面気圧の格子点上の極小位置を求める．
2. 1 で求めた極小位置を中心とする 9 点の海面気圧値から海面気圧を 2 次曲面で近似する．
3. 計算された 2 次曲面の頂点を中心位置，頂点での値を中心気圧とする．

上記の方法で求めた台風中心位置を用いて，時刻ごとの台風の進行速度を定義する．進

*2 Grid Point Value，格子点値
*3 http://database.rish.kyoto-u.ac.jp

行速度の大きさは，対象時刻の前後 6 時間の位置から次の式を用いて求める．

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + 6\mathrm{h}) - \mathbf{r}(t - 6\mathrm{h})}{42300(\mathrm{s})} \tag{2.1}$$

ここで $\mathbf{r}(t)$ は時刻 t における台風中心の位置ベクトルを表す．すなわち，進行速度は 6 時間前から 6 時間後までの 12 時間の平均移動速度（m/s）に相当する．ただし初期時刻はその時刻から 6 時間後までの 6 時間の平均移動速度を進行速度とする．また進行方向は速度ベクトルが真北となす角度 θ を時計回りを正として測って定義する（図 2.1）．

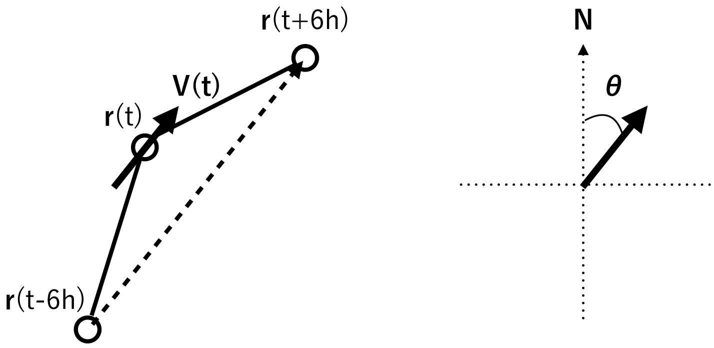

図 2.1: 台風進行速度の定義

2.2.2　環境場の解析

台風進路は環境場の指向流の影響を強く受ける．指向流を定める鉛直範囲の定義は多数存在するが，本研究では台風第 19 号が非常に強い勢力を持っていたことを考慮して，Velden and Leslie (1991) において最も強い台風進路との相関が高いとされている 850–300 hPa の鉛直重みつき平均風を用いた．簡単のため，台風中心に対して軸対称な風成分が台風に伴う風であると仮定し，非軸対称風を環境場の風とみなす．軸対称成分は台風中心を北極に置くような座標回転を行って計算する (Enomoto, 2019)．回転させた座標系において，軸対称成分は帯状平均として，非軸対称成分は帯状平均からの差として簡単に計算することができる．

2.2.3　アンサンブル特異ベクトル感度解析

この節では予報誤差要因の解析に用いた感度解析手法について述べる．

2.2.3.1　特異ベクトル感度解析

本研究では Torn et al. (2018) とは異なり，特異ベクトル感度解析（Singular Vector Sensitivity Analysis, SVSA）を応用した手法を用いる．SVSA は予報初期時刻の摂動が線形時間発展することを仮定し，任意の検証時刻に最も発達する摂動を求めることで，予

報誤差に最も大きく寄与する摂動を特定する．このような摂動は予報モデルを線形近似した接線形モデルの特異値分解を利用することで求められる（図 2.2）．

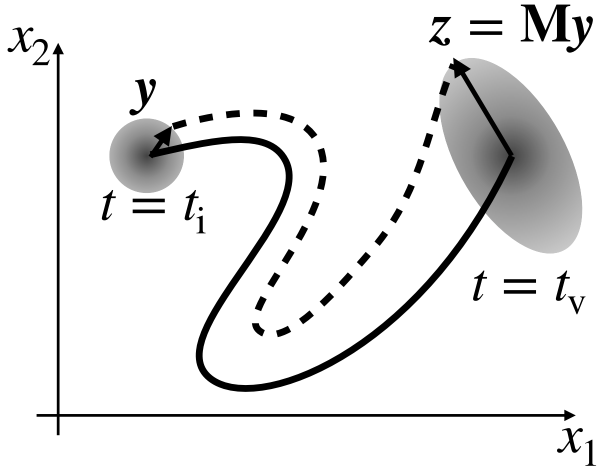

図 2.2: SVSA の概念図．初期時刻 t_{i} の摂動を $\mathbf{y}$，検証時刻 t_{v} の摂動を $\mathbf{z}$，接線形モデルを $\mathbf{M}$ で表す．Enomoto et al. (2015) Fig. 1 に加筆．

以下では Hansen and Smith (2000) の Appendix に従って導出を行う．初期時刻と検証時刻との摂動の大きさの比を以下のように定義する．

$$\sigma = \frac{\|\mathbf{z}\|_{\mathrm{v}}}{\|\mathbf{y}\|_{\mathrm{i}}} = \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\mathrm{v}}\mathbf{z}}{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\mathrm{i}}\mathbf{y}} \tag{2.2}$$

ここで，$\mathbf{W}_{\mathrm{i}}$ は初期時刻のノルム（誤差を測る指標），$\mathbf{W}_{\mathrm{v}}$ は検証時刻のノルムである．通常のベクトルの内積の場合は，これらの行列は単位行列になる．検証時刻の摂動は初期時刻の摂動を接線形モデル $\mathbf{M}$ で時間発展させることで得られる．

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{y} \tag{2.3}$$

これを式 (2.2) に代入すると，σ は $\mathbf{y}$ のみで表すことができる．

$$\sigma = \frac{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\mathrm{v}}\mathbf{M}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\mathrm{i}}\mathbf{y}}$$

ここで，$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ はアジョイントモデルを表す．求めたいのは σ を最大にするような $\mathbf{y}$ である．これは一般化固有値問題

$$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{\mathrm{v}}\mathbf{M}\mathbf{v}_{\mathbf{y}} = \lambda\mathbf{W}_{\mathrm{i}}\mathbf{v}_{\mathbf{y}}$$

を解くことで求めることができる．

特異ベクトルは初期及び検証時刻のノルム $\mathbf{W}_{\mathrm{i}}, \mathbf{W}_{\mathrm{v}}$ に依存し，特に初期時刻のノルムの選択によって空間構造や成長率の異なる摂動を取り出すことができる (Barkmeijer et al., 1999).

2.2.3.2　アンサンブル特異ベクトル感度解析

接線形モデル $\mathbf{M}$ の特異ベクトルは反復計算で求めることができるが，その計算コストはモデルの複雑さに比例して大きくなる．さらに通常の非線形モデルでの予報と別で計算する必要があり，個々の事例に対する感度を求めるのは容易ではない．そこで Enomoto et al. (2015) では，アンサンブル予報を利用して近似的に特異ベクトルを求めるアンサンブル特異ベクトル感度解析（Ensemble Singular Vector Sensitivity Analysis, EnSVSA）を考案した．

アンサンブルメンバーの初期時刻と検証時刻の摂動をそれぞれ $\mathbf{y}_k$，$\mathbf{z}_k$ とする（$k = 1, \cdots, N_\mathrm{e}$ はアンサンブルメンバーのインデックス，N_e はアンサンブルメンバー数を表す）．$\mathbf{z}_k$ はアンサンブル予報を用いて以下のように表すことができる．

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{M}\mathbf{y}_k \approx M(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{y}_k) - \overline{M(\mathbf{x})} \tag{2.4}$$

ただし $\mathbf{x}$ は個々の（摂動量でない）状態変数，$\overline{(\cdot)}$ はアンサンブル平均

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{N_\mathrm{e}} \sum_k \mathbf{x}_k, \quad \overline{M(\mathbf{x})} = \frac{1}{N_\mathrm{e}} \sum_k M(\mathbf{x}_k)$$

を表す．参照場として，アンサンブル平均以外の状態変数（コントロールラン等）をとることもできる．

初期時刻の摂動をアンサンブル摂動の線形結合で表すことを考える．

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{y}_1 p_1 + \mathbf{y}_2 p_2 + \cdots + \mathbf{y}_{N_\mathrm{e}} p_{N_\mathrm{e}} = \mathbf{Y}\mathbf{p} \\ \mathbf{Y} &= [\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_{N_\mathrm{e}}] \\ \mathbf{p} &= [p_1, \cdots, p_{N_\mathrm{e}}]^\mathrm{T} \end{aligned} \tag{2.5}$$

線形時間発展の仮定から，検証時刻の摂動も初期時刻と同じ係数を用いた線形結合で表すことができる．

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{z}_1 p_1 + \mathbf{z}_2 p_2 + \cdots + \mathbf{z}_{N_\mathrm{e}} p_{N_\mathrm{e}} = \mathbf{Z}\mathbf{p} \\ \mathbf{Z} &= [\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_{N_\mathrm{e}}] \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで，式 (2.4) より，

$$\mathbf{Z}\mathbf{p} \approx \sum_k \{M(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{y}_k) - \overline{M(\mathbf{x})}\} p_k \tag{2.7}$$

である．

以上の式を式 (2.2) に代入すると，以下の一般化固有値問題を得る．

$$\mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{W}_\mathrm{v}\mathbf{Z}\mathbf{v}_\mathbf{p} = \lambda \mathbf{Y}^\mathrm{T}\mathbf{W}_\mathrm{i}\mathbf{Y}\mathbf{v}_\mathbf{p} \tag{2.8}$$

この一般化固有値問題の次元はアンサンブルメンバー数 N_e となっている．

$\mathbf{W}_\mathrm{i}$，$\mathbf{W}_\mathrm{v}$ が正定値対称行列の場合は，$\mathbf{Y}^\mathrm{T}\mathbf{W}_\mathrm{i}\mathbf{Y}$，$\mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{W}_\mathrm{v}\mathbf{Z}$ も正定値対称行列になるため，これらの行列のコレスキー分解を考えると通常の固有値問題に変形することができる．Enomoto et al. (2015) では初期時刻の摂動がノルムで正規化されている（$\mathbf{Y}^\mathrm{T}\mathbf{W}_\mathrm{i}\mathbf{Y}$ が単位行列になっている）と仮定して，$\mathbf{Z}$ を検証時刻のノルムで正規化した行列 $\mathbf{Z}'(=\mathbf{W}_\mathrm{v}^{-1/2}\mathbf{Z})$ の特異値分解を利用して解析を行なっている．本研究でもこれに準じて解析を行なった．アンサンブル感度解析においては，予報初期時刻のアンサンブルメンバーの作成方法を変えることで，異なる初期ノルムに対する特異ベクトルを近似的に求めることができる (Hamill et al., 2003).

2.2.3.3　解析手順

本研究における初期及び検証時刻と検証領域の設定については第 3.3.2 節で述べる．検証時刻の誤差ノルムには湿潤全エネルギーノルム (Ehrendorfer et al., 1999) を用いた．

$$\mathrm{TE}=\frac{1}{2}\frac{1}{D}\int_D\int_0^1\left[u'^2+v'^2+\frac{c_\mathrm{p}}{T_\mathrm{r}}T'^2+RT_\mathrm{r}\left(\frac{p'_\mathrm{s}}{p_\mathrm{r}}\right)^2+\epsilon\frac{L^2}{c_\mathrm{p}T_\mathrm{r}}q'^2\right]\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}D \tag{2.9}$$

ここで，D は検証領域，u',v',T',q' はそれぞれ東西風速，南北風速，気温，地表気圧，比湿の摂動を表し，鉛直積分はシグマ座標系（$\sigma=p/p_\mathrm{r}$）で行う．定数は，定圧比熱 $c_\mathrm{p}=1005.7$ J/kg/K，気体定数 $R=287.04$ J/kg/K，単位質量当たりの潜熱 $L=2.5104\times10^6$ J/kg である．参照気温と参照気圧，潜熱加熱係数はそれぞれ $T_\mathrm{r}=270$ K，$p_\mathrm{r}=1000$ hPa，$\epsilon=1.0$ とした．式 (2.9) の被積分関数のうち，第 1，2 項は運動エネルギー，第 3，4 項はポテンシャルエネルギー，第 5 項は潜熱加熱の寄与を表している．従って本研究での検証時刻のノルム $\mathbf{W}_\mathrm{v}$ は検証領域内の摂動を切り出し，その領域内で平均した湿潤全エネルギーを評価する行列となる．

以下に EnSVSA の計算手順を示す．解析には地表気圧と 850，500，300 hPa の風速，気温，比湿の予報値を用いる．

1. 検証時刻において，検証領域内の各変数のアンサンブル平均からの摂動 u',v',T',q' を計算する．
2. 空間積分と鉛直積分の重みを掛ける．
3. T'，p'_s，q' に式 (2.9) に対応する重み（それぞれ $\sqrt{c_\mathrm{p}/T_\mathrm{r}}$，$\sqrt{RT_\mathrm{r}}/p_\mathrm{r}$，$L\sqrt{\epsilon/c_\mathrm{p}T_\mathrm{r}}$）を掛ける．
4. 1–3 の操作を各メンバーに対して行い，その摂動を列ベクトルとする行列 $\mathbf{Z}'$ を作る．
5. $\mathbf{Z}'$ を特異値分解する．$\mathbf{Z}'=\mathbf{U\Sigma V}^\mathrm{T}$

手順 2 において，空間積分の重みは $\cos\phi$（ϕ は緯度）とし，鉛直積分の重みは指向流の鉛直積分（Appendix A）を台風の影響が及ぶと考えられる 1000–200 hPa に拡張した式

支配方程式	プリミティブ方程式
水平	適合ガウス格子におけるスペクトル
鉛直	η 座標（気圧 p と $\sigma = p/p_{\mathrm{s}}$ のハイブリッド座標）
時間積分	セミインプリシット法
移流	鉛直保存セミラグランジュ法 (Yukimoto et al., 2011)
長波放射	2 方向吸収近似スキーム (Yabu, 2013)
短波放射	δ-Eddington 法 (Joseph et al., 1976)
積雲対流	Arakawa and Schubert (1974)
雲	Smith (1990)，層積雲 Kawai and Inoue (2006)
地表面フラックス	Monin-Obukhov 相似則に基づくバルク法
境界層	Mellor and Yamada (1974, 1982); Han and Pan (2011)
重力波	Iwasaki et al. (1989); Scinocca (2003)
陸面	SiB (Sellers et al., 1986; Sato et al., 1989a,b)

表 2.3: GSM の概要

で計算する．特異値分解で得られた右特異ベクトル $\mathbf{V}$ のうち，最大特異値に対応するベクトル $\mathbf{v}_1$（第一主成分得点）に初期時刻の摂動行列 $\mathbf{Y}$ を投影したベクトルが最も成長率の大きい摂動 $\mathbf{y}_{\max}$ を与える．

$$\mathbf{y}_{\max} = \mathbf{Y}\mathbf{v}_1 \tag{2.10}$$

この最大成長摂動に対して式 (2.9) を計算すると，誤差エネルギーを得ることができる．なおエネルギーノルムは正値しかとらないため，摂動の符号には任意性が生じる．さらに，初期時刻から検証時刻まで線形時間発展を仮定しているため，2 つの時刻の間の任意の時刻における摂動行列を同様に $\mathbf{v}_1$ に投影することで，最大成長摂動の時間発展を見ることができる．

2.3 検証実験の設定と使用モデル

本節では感度解析の検証実験に使用したモデルの仕様と実験設定について述べる．

2.3.1 使用モデル

実験に用いたモデルは気象庁で開発・運用されている全球スペクトルモデル（GSM1705）である．GSM は気象庁の全球数値予報システムで用いられており，週間天気予報や台風進路予報の作成に利用されている．本研究では GSM のソースコードを京都大学スーパーコンピューターシステム A に移植して実験を行った．GSM の概要を表 2.3 に示す (気象庁, 2019).

解像度	TL479L100（水平格子間隔約 40 km，モデルトップ 0.01 hPa）
境界値（現業と同一設定）	海面水温：初期時刻直近の全球海面水温解析値の平年偏差を予報時刻に日別内挿した気候値に加えて推定 海氷分布：初期時刻直近の全球海氷密接度解析値の初期偏差を固定し，海氷面積平年偏差を維持するように予測値を気候値で修正 積雪被覆：初期は全球積雪深解析，以降積雪水当量の予測値から診断 地中温度：初期は解析値，以降は予測値 土壌水分：初期は気候値，以降は予測値
積分時間	84 時間

表 2.4: 検証実験の共通設定

2.3.2 実験設定

GSM の水平解像度は感度解析に用いた気象庁全球アンサンブル予報データに近づけるために，現業アンサンブル予報と同じ TL479 とする．TL479 の初期値は現業決定論予報（TL959）の初期値から解像度変換を行って作成した．実験ごとの初期値の設定は第 3.4 節で述べる．全ての実験に共通する実験設定を表 2.4 にまとめる．

第 3 章

2019 年台風第 19 号の進路予測可能性

本章では 2019 年台風第 19 号の進路の予測可能性に関して，前半でセンター間での進路予報精度の比較と気象庁の進路予報誤差の要因に対する解析の結果（NE21）を示す．後半では NE21 で行った感度解析の結果を検証するために，気象庁の全球モデルを用いた再現実験を行う．

3.1　2019 年台風第 19 号の概要

2019 年台風第 19 号（Hagibis）は 2019 年 10 月 6 日 3 時（5 日 18 UTC）に発生し，6 日 21 時（12 UTC）に南鳥島の南で台風に発達した．その後 7 日から 8 日にかけて西進したのち北に進路を変え，12 日 19 時（10 UTC）ごろ伊豆半島に上陸した（図 3.1 (i)）．中心気圧は最大で 915 hPa まで達し，上陸直前（12 日 09 UTC）でも 955 hPa を記録した（JMA, 2020）．関東甲信と東北地方を中心に記録的な大雨と暴風をもたらし，神奈川県箱根町では 24 時間降水量が 942.5 mm に達した（図 3.1 (ii)）ほか，複数の地域で河川氾濫や土砂災害等の大きな被害が出た (内閣府, 2020)．気象庁では台風第 19 号による甚大な被害を考慮して，本台風を令和元年東日本台風と命名した．

台風第 19 号はその進路直下の海面水温（SST）が気候値と比較して高かったことが特徴の一つであり，先行研究では海面水温との関係が調べられている．Ito and Ichikawa (2021) では，台風直下の SST 気候値偏差を除去する感度実験を行い，高い SST が台風を強化することで上層の発散が強まり，台風が上層ジェットの影響をより強く受けて加速することを示した．また，Iizuka et al. (2021) では，東北地方に大雨をもたらした要因である対流圏下層の前線の位置が親潮流域の SST の影響を受けており，SST が高いほど前線が内陸に位置し地形との相互作用を通して沿岸域に強い降水をもたらすことを示した．しかし台風第 19 号の進路の予測可能性は詳細に調べられていない．そこで本研究では，

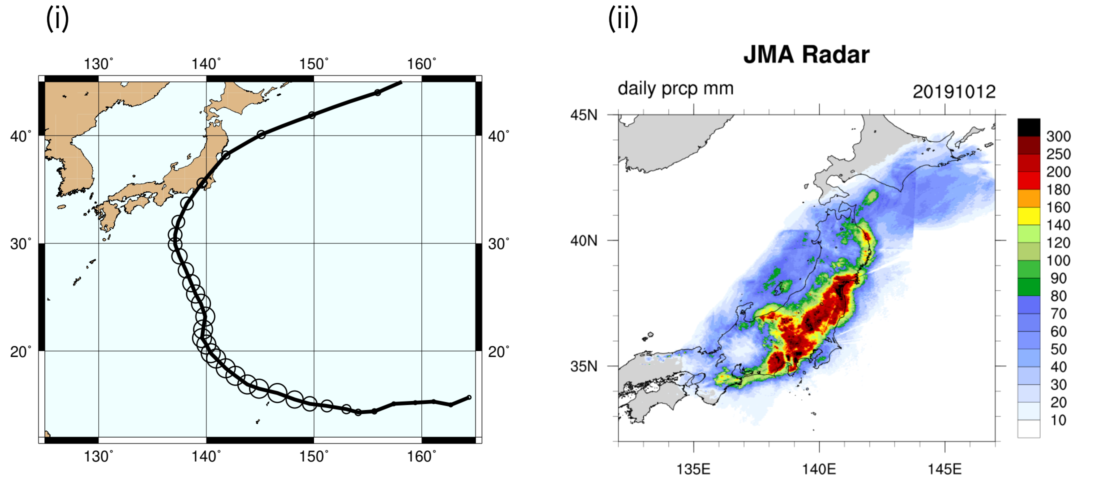

図 3.1: (i) 台風第 19 号の進路．円の大きさは中心気圧の強さに比例している．気象庁ベストトラックデータをもとに描画した．(ii) 2019 年 10 月 12 日の 24 時間降水量．単位は mm

複数の予報センターの進路予報を比較することで進路の予測可能性を評価した．また急激な精度悪化が見られた気象庁の進路予報に着目し，その悪化要因を特定するための解析を行った．

3.2 センター間の予報精度比較

まず 4 つの予報センター（ECMWF，NCEP，UKMO，気象庁）のアンサンブル平均を用いて，予報精度を比較した（図 3.2 (i,ii)）．本研究では解析対象の 2019 年台風第 19 号が上陸して生活圏に甚大な被害をもたらしたことを考慮して，上陸に近い予報時刻（12 日 12 UTC，以降上陸時刻と定義する）における台風中心位置及び中心気圧の実況値からのずれを精度指標として用いる．中心位置の精度（図 3.2 (i)）はセンターによってばらつきが大きく，特に早期の予報（120〜84 時間予報）では気象庁が他の 3 センターと比較して非常に精度が高い．気象庁の早期予報は年平均（太実線）と比較しても高精度であることがわかる．120 時間より長いリードタイムの予報精度は時刻ごとに大きく変動しているが，これは本研究で用いた中心位置のトラッキング手法の精度が予報値と実況の台風中心位置が離れるほど落ちるためと考えられる．本研究で注目する予報期間（84〜72 時間）においてはその影響は無視できるが，より長いリードタイムで正確に台風位置を判断するには，中心気圧以外の要素も含めたより高度なトラッキング手法を用いることが必要であると示唆される．中心気圧の精度（図 3.2 (ii)）は中心位置と比較するとばらつきが小さく，96 時間予報以降では気象庁の 2019 年平均を下回る誤差で推移している．気象庁がやや誤差が大きいのは，モデルの解像度が 4 センターの中で最も粗いためであると考えられる．

気象庁の進路予報精度が他のセンターと比べて高かった理由について，移動速度の統計解析から考察する．第 2.2.1 節の式 (2.1) を用いて計算した速さと進行方向に対して，以

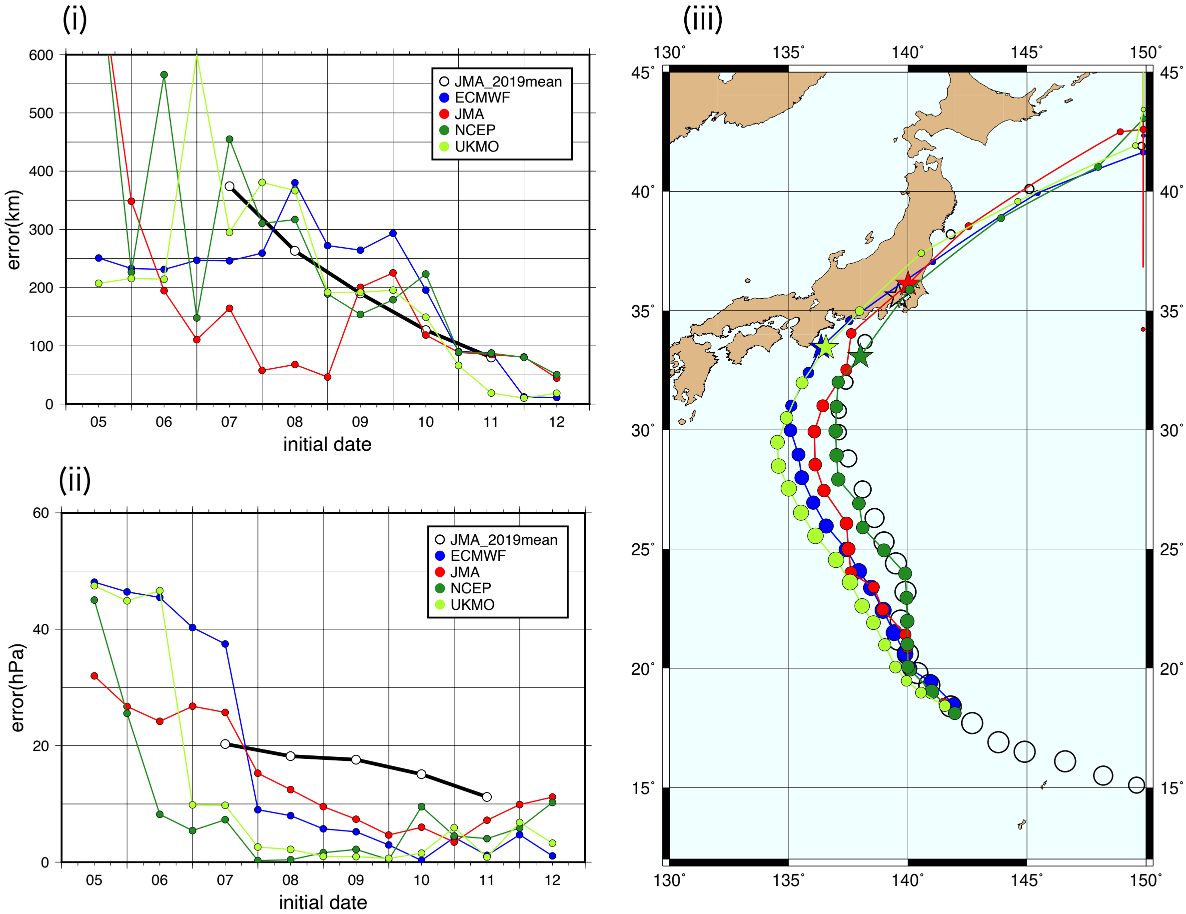

図 3.2: 4 センターによる台風第 19 号の予報精度の比較．上陸時刻における (i) 中心位置の誤差（km），(ii) 中心気圧の誤差（hPa）．横軸は予報初期時刻（UTC）を表す．黒線と白抜き丸は 2019 年の気象庁台風予報の平均誤差を示し，青が ECMWF，赤が気象庁，緑が NCEP，黄緑が UKMO の誤差を示している．(i) の図では縦軸の上限を 600 km に制限しており，5 日 12 UTC における気象庁と NCEP の誤差はそれぞれ 749.9 km，756.1 km である．(iii) 8 日 12 UTC からの予報進路．白抜き丸はベストトラックを表す．各センターの中心位置は 6 時間ごとに丸を打っている．星印が 12 日 12 UTC の位置を示している．(i), (iii) は Nakashita and Enomoto (2021) Fig. 1

下の式で定義する平均誤差（ME）と二乗平均平方根誤差（RMSE）をそれぞれ算出する．

$$\mathrm{ME} = \frac{1}{N_t}\sum_{t=t_0}^{T_1}(v_\mathrm{f}(t) - v_\mathrm{b}(t)) \tag{3.1}$$

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_t}\sum_{t=t_0}^{T_1}(v_\mathrm{f}(t) - v_\mathrm{b}(t))^2} \tag{3.2}$$

ここで t は予報時刻，t_0 は初期時刻，T_1 は上陸時刻（12 日 12 UTC），N_t は予報初期時刻から上陸時刻までの時間ステップ数であり，$v_\mathrm{f}(t)$ は予報値の速さまたは進行方向，$v_\mathrm{b}(t)$ はベストトラックの速さまたは進行方向を示す．ME は上陸時刻における速さまたは進行方向の誤差を，RMSE は初期時刻から上陸時刻まで積算した速さまたは進行方向の誤差

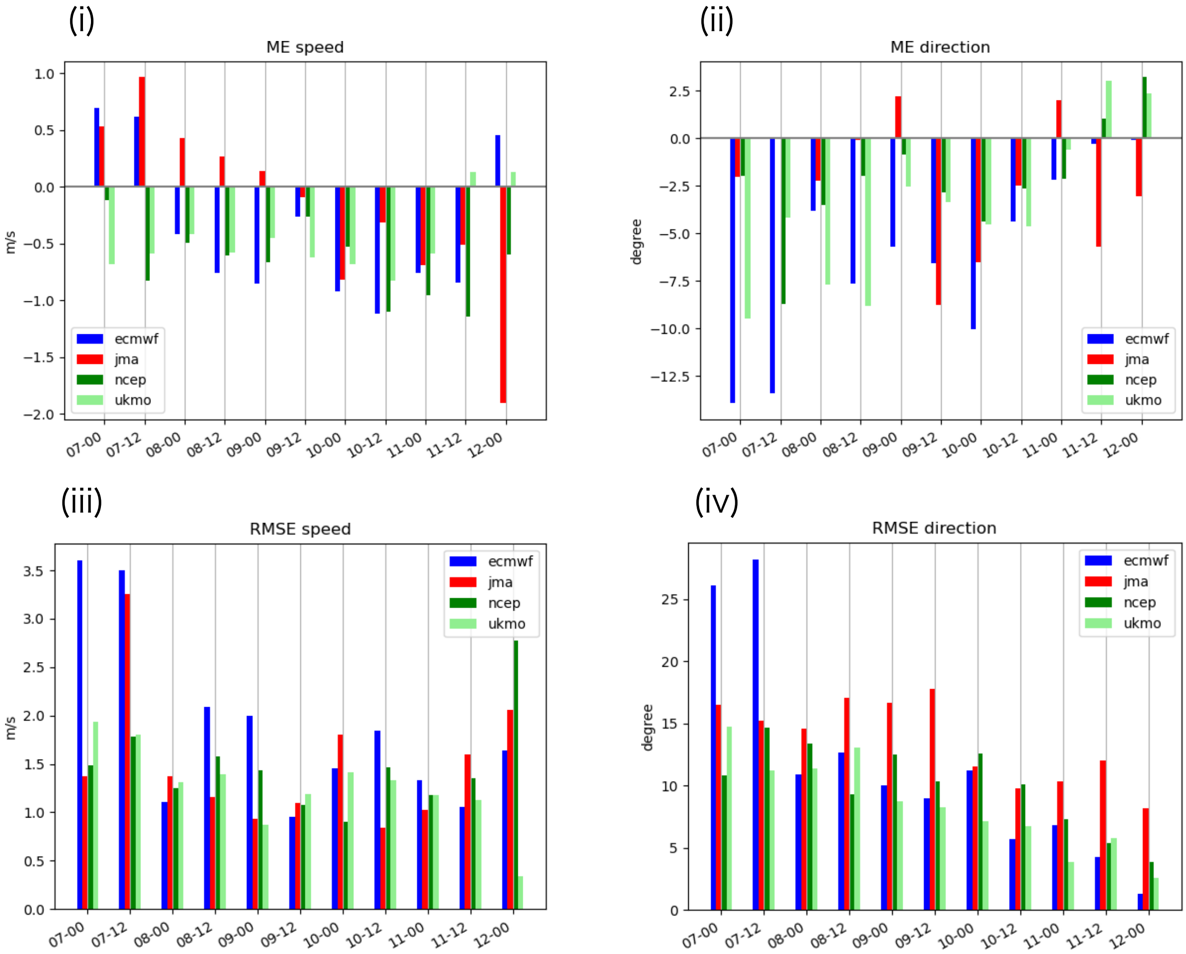

図 3.3: 台風の移動速度の統計解析．(i) 速さの平均誤差，(ii) 進行方向の平均誤差，(iii) 速さの二乗平均平方根誤差，(iv) 進行方向の二乗平均平方根誤差．横軸は予報初期時刻を日付-時刻の形式で表している．色とセンターの対応は図 3.2 と同様．

を表す指標である．

図 3.3 に 7 日 00 UTC から 12 日 00 UTC にかけて解析を行った結果を示す．まず上陸時刻での誤差（図 3.3 (i)，(ii)）を見ると，気象庁と他のセンターとの精度の開きが大きい 7 日から 8 日 12 UTC の範囲では気象庁の方向誤差が非常に小さいことがわかる．方向の平均誤差が負になることは上陸位置が西にずれることを意味しており，この結果は気象庁以外の予報が西偏する傾向を持っていたことを示している．また速さの平均誤差から，8 日から 9 日にかけて気象庁以外のセンターの予報が遅れる傾向にあったのに対して，気象庁はむしろ実況よりもやや速く進む傾向にあったことがわかる．これらの結果から，上陸位置に関しては気象庁は他のセンターと異なる進路の傾向を持っていたと考えられる．

一方で上陸時刻までの平均誤差（図 3.3 (iii)，(iv)）では，気象庁と他のセンターに顕著な差が見られず，方向誤差については気象庁の誤差が他のセンターよりも大きくなる時刻が多い．これは全ての予報時刻を考慮した誤差傾向に関しては気象庁と他のセンターで差がなかったことを表している．この進路傾向が顕著に現れているのが 8 日 12 UTC から

の予報である（図 3.2 (iii)）．気象庁は予報前半に ECMWF や UKMO と同様にベストトラックに対して西にずれるが，2 センターよりも早いタイミングで転向し，大きく軌道修正してベストトラックとほぼ同じ位置に上陸している．NCEP は予報前半からベストトラックに沿った進路をとっており，方向誤差の小ささに現れている（図 3.3 (iv)）．しかし速さの過小評価傾向が強いため，上陸タイミングが 6 時間程度遅れている．従って，気象庁の早期の予報精度が非常に高いのは本研究で着目した上陸時刻のみであり，予報期間全体にわたる進路予報精度は他のセンターと大差なかったことがわかる．このことは，全般的な進路予報精度はまだ向上の余地があることを示唆している．一方で，気象庁以外の 3 センターに顕著に現れた速度の過小評価傾向が，気象庁には見られなかったことは興味深い点である．Miyachi and Enomoto (2021) では 2009 年に北西太平洋で発達した熱帯低気圧の進路予報について統計をとり，気象庁と ECMWF は転向後に速度の過小評価が起きやすく，この傾向はモデルの入れ替えでは変化しないことを示した．彼らの結果から考えると今回の傾向の違いも初期値に起因することが考えられるが，この速度傾向がこの事例だけでなく他の事例でも見られる場合，各センターの数値予報モデルの違いに依存している可能性がある．今後他の台風事例についてもセンター間比較を行い，このような傾向が共通してみられるかどうかを検証していく必要がある．

3.3　気象庁の進路予報精度悪化の要因

前節で示したように，気象庁の早期予報は非常に精度が高かったが，上陸の 3 日前（9 日 12 UTC 初期値）に急激に精度が悪化している．この節ではこの精度悪化要因について考察する．

3.3.1　進路変化と環境場の違い

図 3.4 に精度が急変した前後のアンサンブル平均の予報進路を示す．上陸位置の誤差が急増したタイミングで上陸位置が約 200 km 西にずれ，渥美半島付近に上陸している．初期時刻からの進路を見ると，北緯 20 度に位置する 10 日 12 UTC（00 UTC からの予報で 36 時間後，12 UTC からの予報で 24 時間後）まではどちらの初期時刻からの予報もベストトラックに対して西偏傾向であり，むしろ 00 UTC からの予報のほうが西にずれている．しかしその後 00 UTC からの予報ではほぼ真北に進み，北緯 30 度に位置する 11 日 12 UTC にはベストトラックから約 65 km 西にずれた位置に存在するのに対して，12 UTC からの予報では北西に進んだのち北北西の進路をとり，11 日 12 UTC にはベストトラックから約 150 km 西にずれている．各アンサンブルメンバーによる予報進路（図 3.5）を見ると，00 UTC 初期値のメンバーは北緯 30 度を超えてからの進行方向が北東方向に揃っており，上陸位置の差は進行速度の差からもたらされていると考えられる．一方 12 UTC 初期値のメンバーは北緯 30 度を超えてからの進行方向は北から北東方向にばら

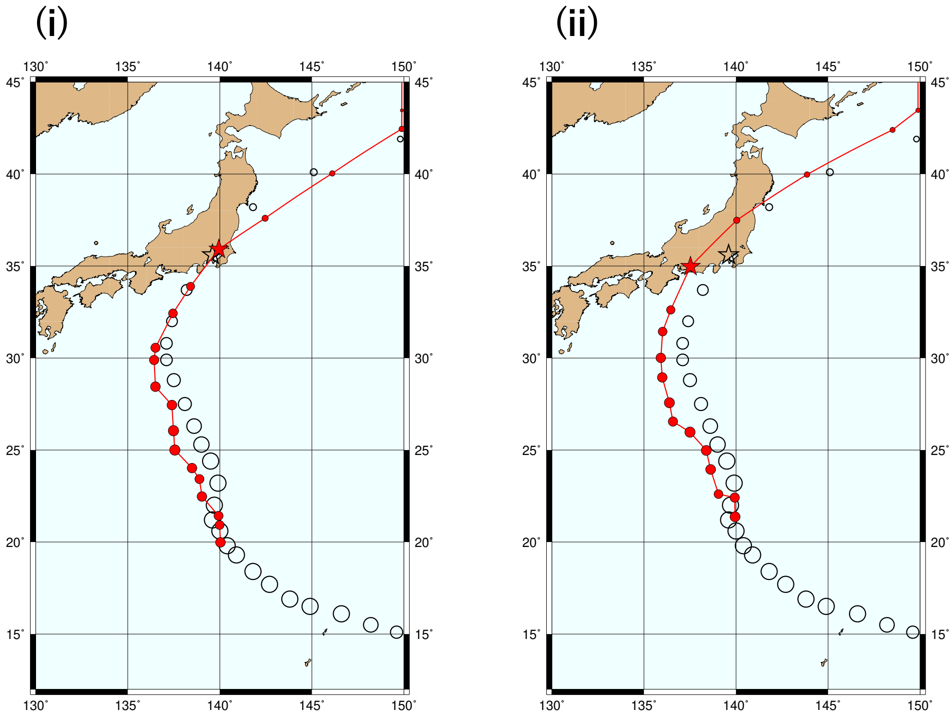

図 3.4: 気象庁の予報進路．図の見方は図 3.3 (v) と同様．(i) 9 日 00 UTC 初期値，(ii) 12 UTC 初期値．

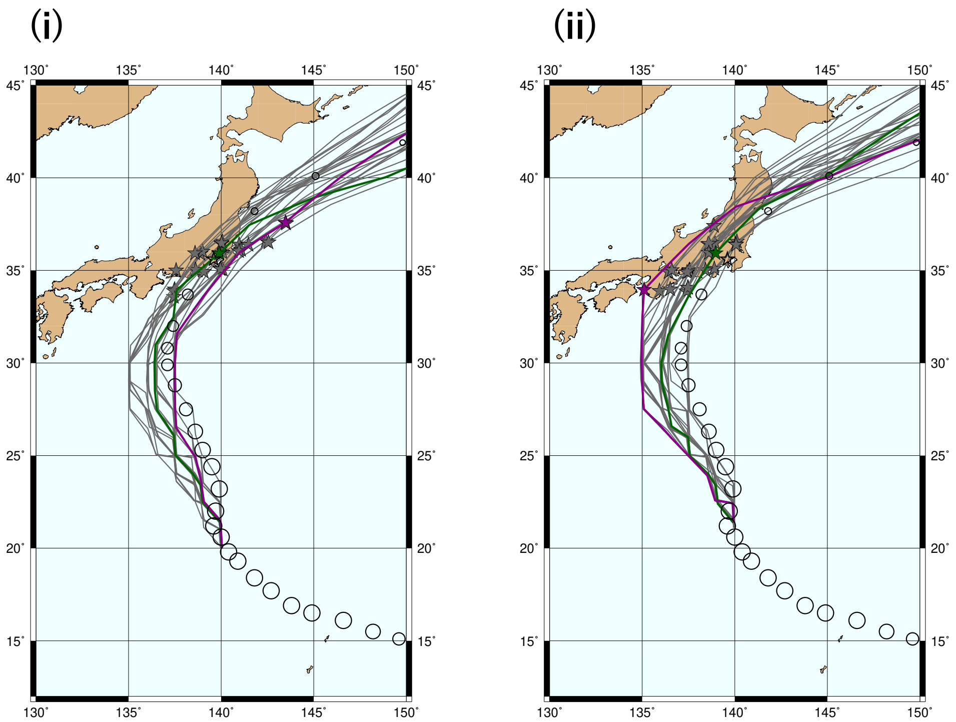

図 3.5: 図 3.4 と同様．ただし上陸位置の精度が最も高いメンバーを緑，最も低いメンバーを紫，それ以外のメンバーを灰色で示す．上陸に最も近い時刻以外の位置は省略している．

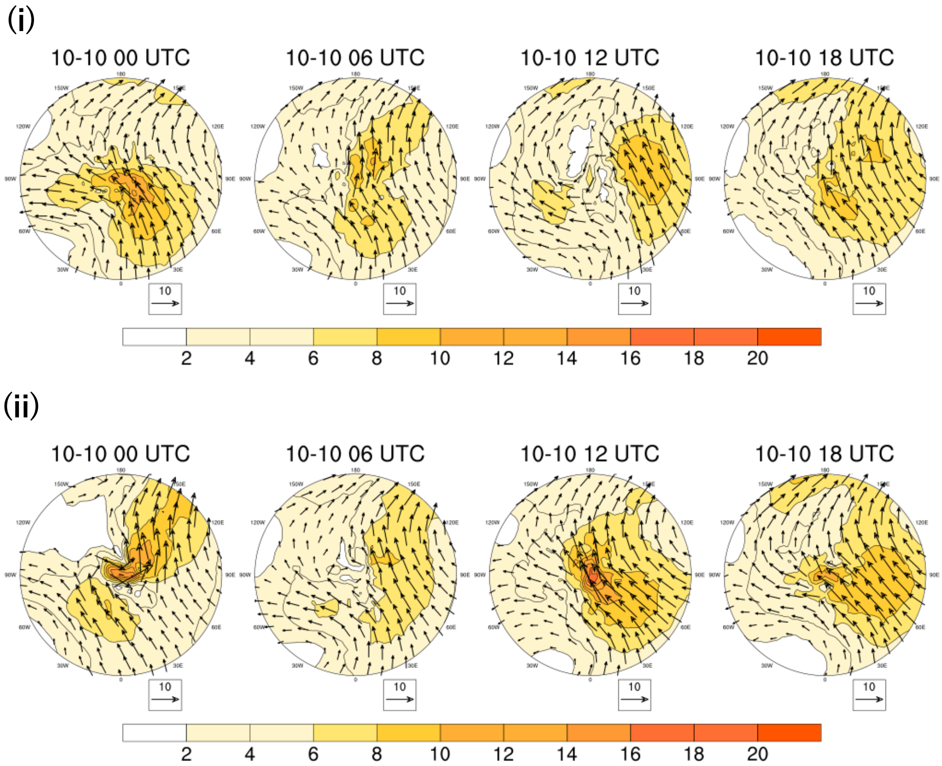

図 3.6: 10 日の予報値における台風中心に対して非軸対称な鉛直積分風．中心から半径緯度 8 度分を示す．鉛直積分は第 2.2.2 節で述べたように 850–300 hPa で定義している．等値線は風速（2 m/s ごと）を表す．(i) 9 日 00 UTC 初期値，(ii) 12 UTC 初期値．

つき，上陸位置が東西方向に大きくばらついていることがわかる．12 UTC 初期値でも緑で示すメンバーのように，00 UTC 同様実況と近い位置に上陸するメンバーも存在していることから，9 日 00 UTC から 12 UTC にかけて上陸位置の予測可能性が下がっていることが示唆される．

10 日の進路変化をもたらした環境場の指向流を見るために，第 2.2.2 節で述べた方法で台風軸対称成分を除いた風の分布を図 3.6 に示す．10 日 00 UTC には 00 UTC 初期値（図 3.6 (i)）で北西向きの流れが現れており，進路の向きと対応している．一方 12 UTC 初期値（図 3.6 (ii)）では 10 日 12–18 UTC にかけて北西から西北西に流す風が現れている．特に 10 日 12 UTC には風の西向き成分の大きさが 00 UTC 初期値では約 2 m/s であるのに対して，12 UTC 初期値では約 7 m/s に達しており，より強く台風進路を西にずらしていたことがわかる．

3.3.2 アンサンブル感度解析

進路西偏の要因を特定するために，アンサンブル感度解析を行った．本研究では進路予報の急激な精度悪化が見られた 10 月 9 日 12 UTC を初期時刻として，12 日 12 UTC を検証時刻，台風中心位置のずれが見られた領域（東経 137–142 度，北緯 33–36 度）を検

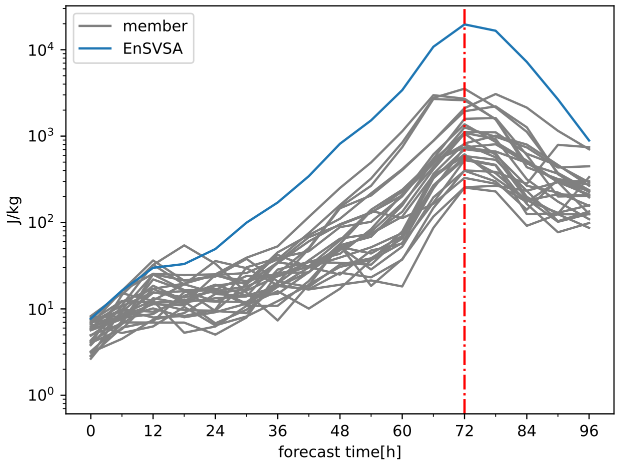

図 3.7: 検証領域における摂動エネルギーの時間発展．青で感度解析第一モード，灰色で各アンサンブルメンバーの摂動エネルギーを表す．一点鎖線（赤）で検証時刻を示している．.

証領域として解析を行った．感度解析で得られた第一モードの寄与率は 68.79 % であったため，第一モードから得られる最大成長摂動に絞って解析を進める．摂動エネルギーの時間発展（図 3.7）を見ると，感度解析がアンサンブルメンバーの初期摂動よりも検証時刻での発達率が大きい摂動を特定できていることがわかる．感度解析第一モードの摂動エネルギーは検証時刻まで単調に増加し，検証時刻にはアンサンブル初期摂動よりも約 1 オーダー大きいエネルギーを持っている．アンサンブル初期摂動のエネルギーも検証時刻付近で極大となっているものが多いが，これはこの時刻付近で検証領域を台風が通過するためであり，メンバー間でのピーク位置のずれは上陸位置のばらつきを表している．感度解析は検証時刻のエネルギーが最大となるように計算しているため，検証時刻の 24 時間後にはアンサンブル摂動と同程度のエネルギーまで減衰している．図 3.8，3.9 には摂動エネルギーの空間分布を示す．初期時刻には台風中心（北緯 21.4 度，東経 139.9 度）南東の領域（およそ北緯 10–15 度，東経 148–155 度）に最も大きな感度を示している（図 3.8 (i)）．この高感度領域は時間が進むとともに北に広がったのちに西へと伸び，24 時間後（10 日 12 UTC）には台風中心の感度と結びついている．初期時刻のエネルギーは大半を潜熱が占めているが，時間発展とともに運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに変換され，上陸時刻には運動エネルギーが最も大きくなる（図 3.8，3.9 (ii–iv)）．これは湿潤全エネルギーの定義 (2.9) において潜熱加熱項にかかる係数を $\epsilon = 1$ と大きく設定したためであるが，ϵ を小さくしたり，潜熱加熱項を省略した乾燥全エネルギーをノルムとしても，エネルギーの振幅は小さくなるが同じ領域に感度を示す．なお沿海州付近にも比較的大きな感度が現れているが，台風と結びつくことなく東に抜けていくため進路西偏には関与していないと考えられる．

第一モードから得られる初期摂動を図 3.10 に示す．台風南東の高感度領域に対応して，

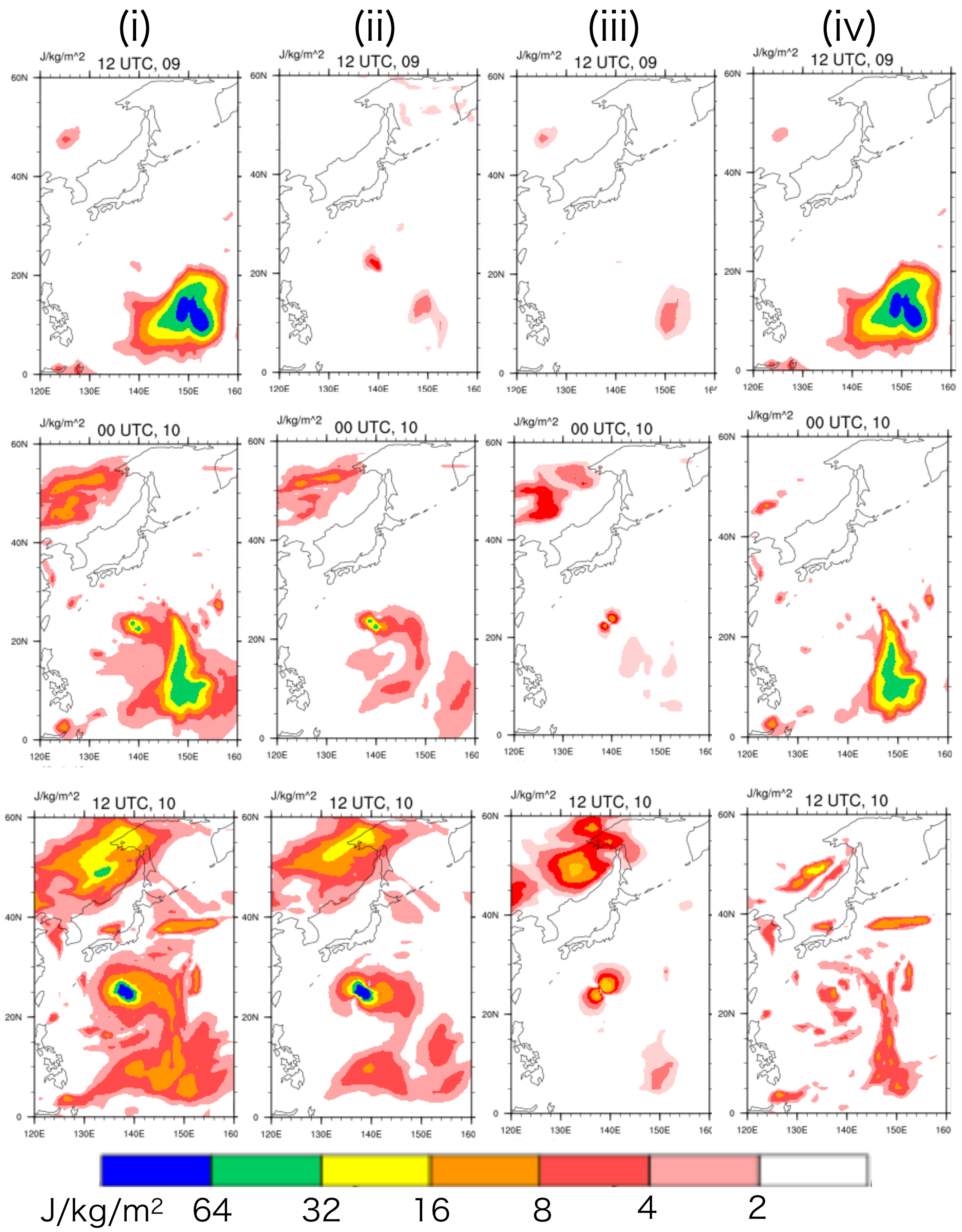

図 3.8: アンサンブル感度解析で得られた第一モードの摂動エネルギーの空間分布．(i) 湿潤全エネルギー，(ii) 運動エネルギー，(iii) ポテンシャルエネルギー，(iv) 潜熱加熱を示す．

海面気圧（図 3.10 (i)）と対流圏下層の気温および比湿（図 3.10 (ii)）の摂動が現れている．中層（図 3.10 (iii)）の摂動は明瞭でなく，上層（図 3.10 (iv)）にも下層と同じ方向の気温摂動が現れているが，振幅は下層より小さい．すなわち最大成長率を持つ初期摂動は傾圧的な構造をしている．図 3.11 に時間発展後の最大成長摂動における海面気圧と鉛直積分風を示す．24 時間後（図 3.11 (i)）の 10 日 12 UTC にはその時点での台風中心（北緯 25 度，東経 138 度）に対して北東に正，南西に負の双極的な構造を持つ海面気圧摂

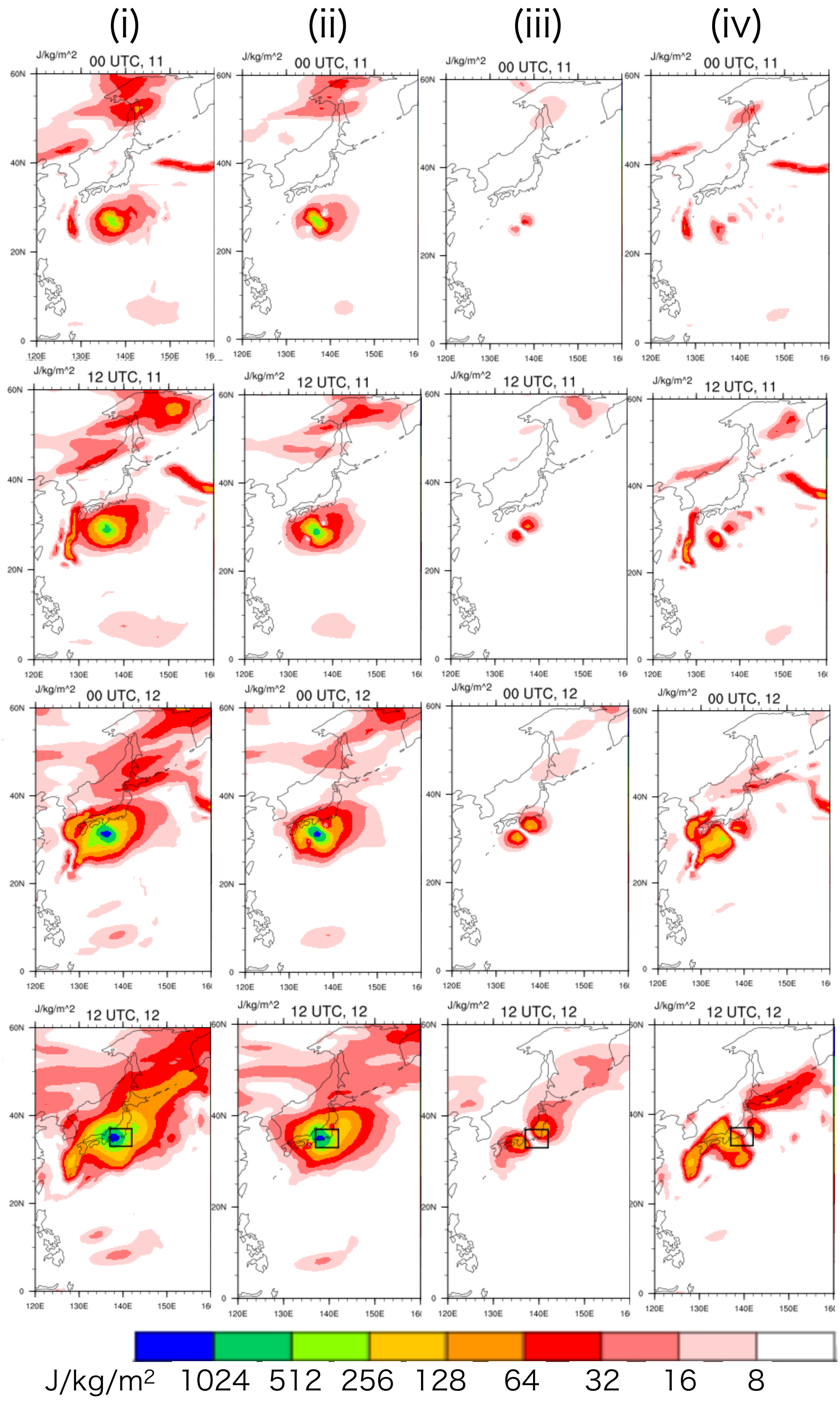

図 3.9: 図 3.8 の続き．12 日 12 UTC の図の黒矩形は検証領域を表す．

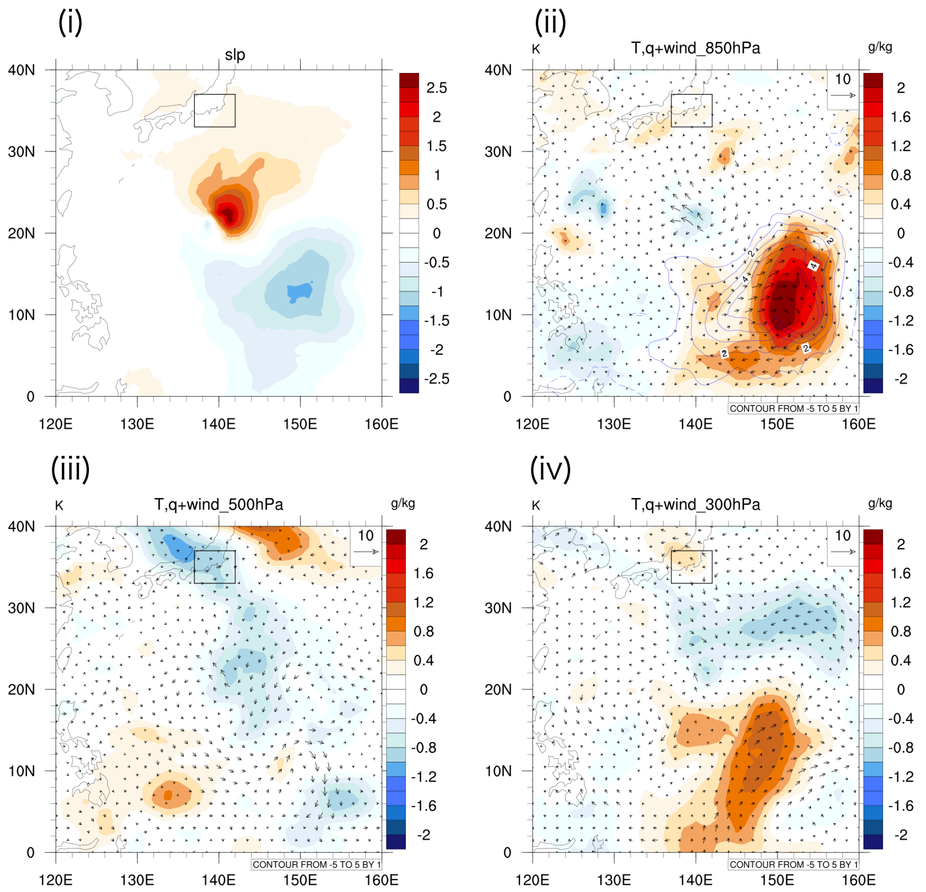

図 3.10: 感度解析第一モードの主成分得点から得られた最大成長初期摂動．(i) 海面気圧，(ii) 850 hPa 面，(iii) 500 hPa 面，(iv) 300 hPa 面を示す．(ii)–(iv) はベクトルで風（m/s，基準は図右上），陰影で気温（0.2K ごと），青の等値線（負値は破線）で比湿（1 g/kg ごと）を表す．

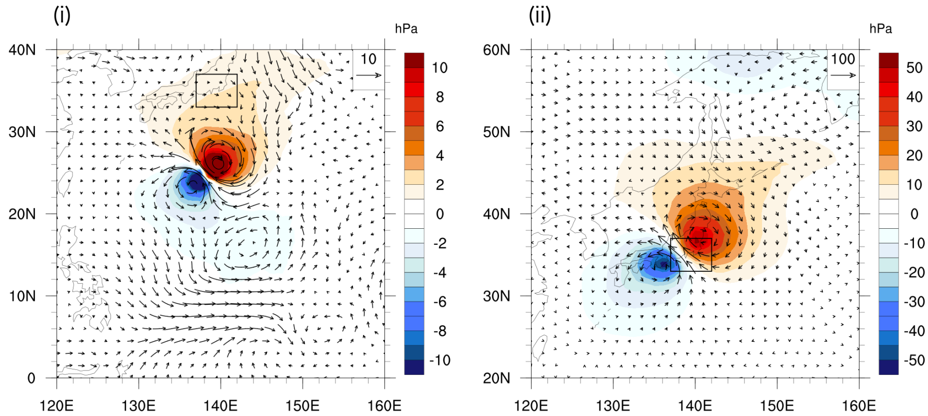

図 3.11: 最大成長摂動を線形に時間発展させた後の摂動分布．(i) 24 時間後（10 日 12 UTC），(ii) 72 時間後（12 日 12 UTC）．陰影で海面気圧（hPa），ベクトルで 850–300 hPa 面の鉛直積分風（m/s，基準は図右上）を示す．黒矩形は検証領域を表す．

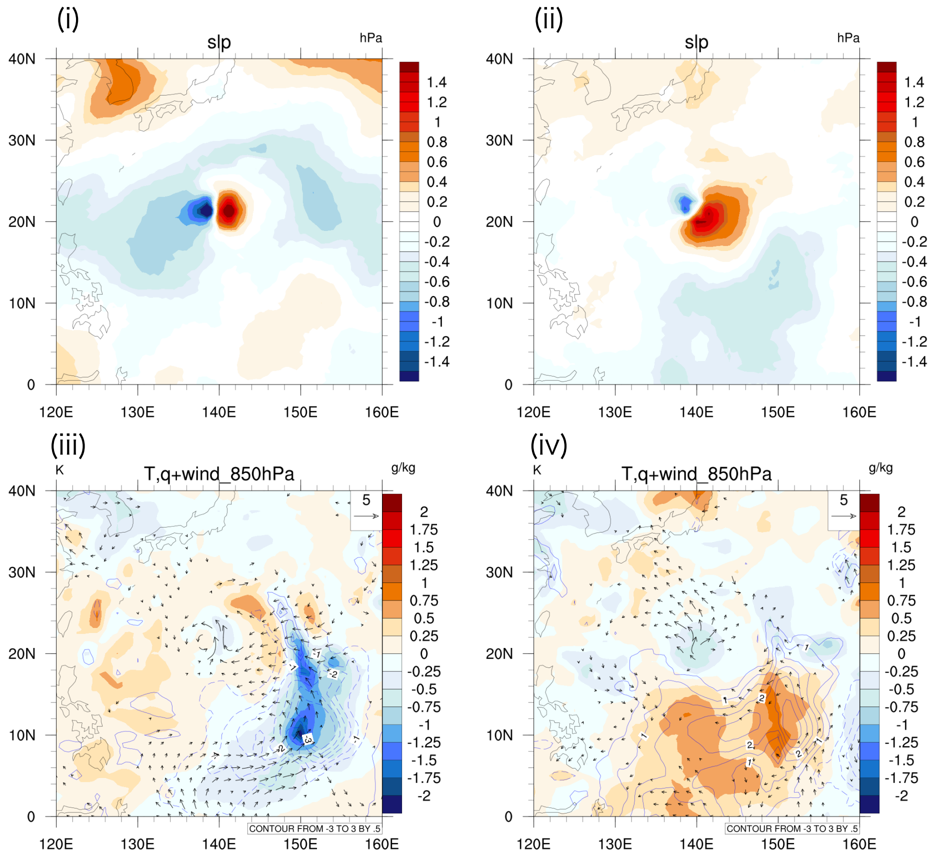

図 3.12: アンサンブル予報の初期摂動．(i) 上陸位置の精度が最も高かったメンバー（5）の海面気圧摂動 (0.1 hPa ごと)，(ii) 精度が最も低かったメンバー（26）の海面気圧摂動 (0.1 hPa ごと)，(iii) メンバー（5）の 850 hPa 面の摂動，(iv) メンバー（26）の 850 hPa 面の摂動．(iii,iv) の描画要素は図 3.10 (ii) と同様．

動になり，台風中心には北西方向に移流する流れが現れている．これは環境場の流れ（図 3.6 (ii)）と整合的である．またこの北西向きの流れは南東（北緯 15 度，東経 145 度付近）の低気圧性循環の北側に伴われる東風から繋がっていることがわかる．図 3.11 (ii) には上陸時刻（12 日 12 UTC）の摂動を示す．海面気圧摂動は 24 時間後と同様に台風中心に対して双極的な構造を保っているが，走行が西南西–東北東に変わり，台風中心をより西にずらす方向になっていることがわかる．その符号から，図 3.10 の初期摂動は進路誤差を増大させる方向の符号であることがわかる．

ここまでの解析で，アンサンブル初期摂動の線形結合で得られる最大成長摂動が台風進路の西偏をよく説明していることが示唆されたが，実際にアンサンブルメンバーに与えられていた初期摂動と上陸位置の精度との関係は明らかでない．そこで，アンサンブルメンバーのうち上陸位置の精度が最も高かったメンバーと低かったメンバーに与えられていた初期摂動を確認した（図 3.12）．台風南東の海面気圧及び下層の気温・比湿摂動は感度解析の摂動とよく対応しており，その符号は上陸位置の精度（図 3.5 (ii)）と整合している．

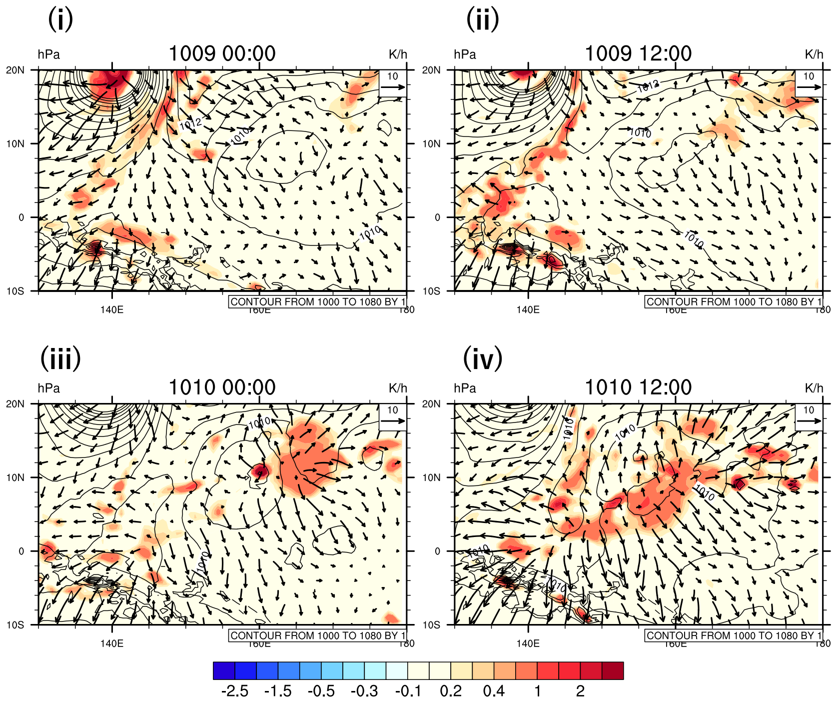

図 3.13: 再解析データにおける 9 日 00 UTC から 10 日 12 UTC までの 12 時間ごとの海面気圧（等値線，1 hPa ごと）と 200 hPa 面の発散風（ベクトル，m/s で基準は図右上）および湿潤加熱による気温変化率（陰影，K/hour）．気温変化率は 600–200 hPa で鉛直平均している．Nakashita and Enomoto (2021) Fig. 6

このことからも感度解析が進路の西偏をもたらした初期摂動をよく捉えていることがわかる．

高感度領域と対応する実際の大気場を確かめるために，再解析データにおける海面気圧と対流活動の様子を図 3.13 に示す．9 日 12 UTC の高感度領域（北緯 10–15 度，東経 148–155 度）にはリッジが存在し，さらにその南東には弱い低気圧性擾乱が存在することがわかる（図 3.13(ii)）．この低気圧性擾乱は時刻とともに発達しながら西進していく様子が確認できる．アンサンブルメンバーの摂動（図 3.12）との対応から，リッジを弱めたメンバーでは上陸位置の精度が悪く，強めたメンバーでは精度が良かったことがわかる．これらの解析結果から，台風南東のリッジを弱く予報したためにその南東の低気圧性擾乱の西進が早まり，低気圧性循環の北側に伴われる西向きの流れが台風進路に影響を及ぼしたことが示唆される（図 3.14）．

3.4 感度解析摂動の検証実験

本節では感度解析の結果を検証し，台風南東のリッジが台風進路に与えた影響をより詳細に理解するために，気象庁 GSM を用いた再予報実験を行う．まず進路西偏前後の 2019 年 10 月 9 日 00 UTC 及び 12 UTC を初期値として，現業決定論予報と解像度以外

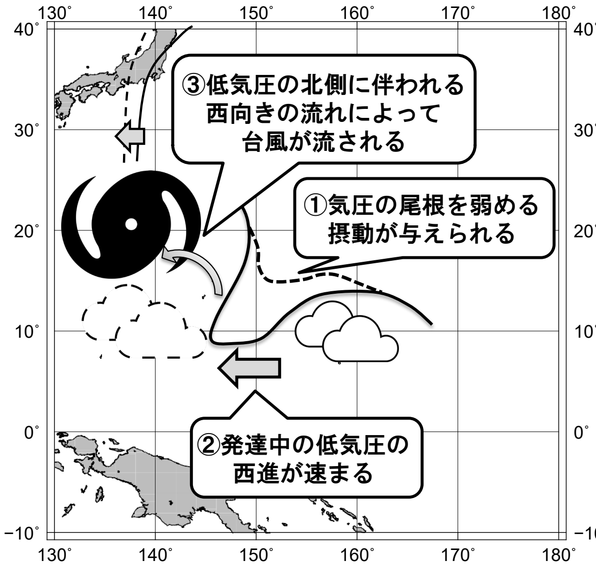

図 3.14: 台風第 19 号の予報進路に対する熱帯擾乱の影響の概念図

は同じ設定での実験を行い，低解像度実験でも進路を再現できることを確認する．次に 12 UTC からの再現実験をコントロール実験として，進路西偏が見られた 9 日 12 UTC の初期値に感度解析で得られる摂動を加えた実験を行い，2 つの実験結果を比較することで感度解析で得られる摂動が進路に与える影響を評価する．

3.4.1　進路の再現性

まずコントロール実験として現業予報の再現実験を行った（図 3.15）．予報進路（図 3.15 (i)）は，00 UTC 初期値の予報後半（北緯 30 度以北）で進行方向および速度に若干の差があるものの，現業決定論予報（マゼンタ）およびアンサンブル平均（シアン）をよく再現している．00 UTC から 12 UTC にかけての進路西偏もよく再現しており，感度解析の検証に十分であると判断できる．台風強度（図 3.15 (ii)）は実況および決定論予報の発達を十分に予報できていないが，上陸 36 から 6 時間前まで見られる決定論予報の過発達傾向を示していないため，その時間帯の強度は決定論予報よりも実況に近い．なおアンサンブル平均（シアン）の強度は再現実験に比べて弱いが，これはデータの取得元（TIGGE）でアーカイブされている元データの解像度が低いためであると考えられる．

3.4.2　摂動付与実験

次に感度解析で得られた初期摂動を加えた初期値からの実験（摂動付与実験）を行う．本研究では上陸位置の西偏を緩和する方向の符号（図 3.10 と逆符号）をとった摂動を加える．また最も大きな感度が得られた台風南東のリッジに着目するため，リッジ周辺の摂動以外を落として初期値を作成した．摂動を加えた初期値の作成方法は Appendix B に記

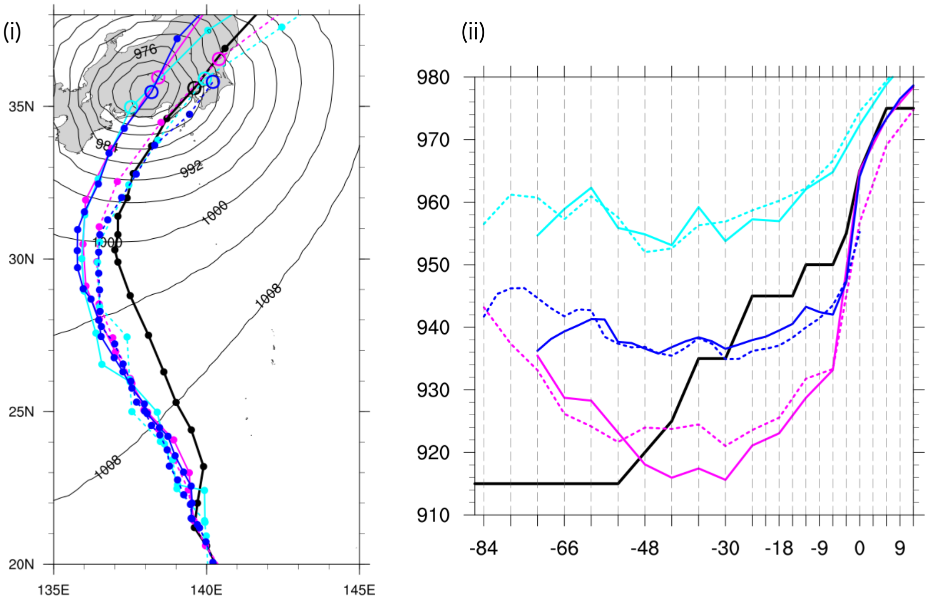

図 3.15: GSM による再現実験の (i) 進路と (ii) 中心気圧．青：再現実験，マゼンタ：全球決定論予報，シアン：全球アンサンブル予報，黒：ベストトラック．破線が 9 日 00 UTC 初期値，実線が 12 UTC 初期値を表す．(i) の等値線は 12 UTC からの再現実験における 12 日 12 UTC の海面気圧を示している．(ii) の横軸は 12 日 12 UTC を基準とした時刻（単位は hour）を示す．

載する．作成した初期値と元の初期値の比較を図 3.16 に示す．地表気圧（図 3.16 (i) 中央）はリッジの変化が明瞭であり，僅かに台風中心にも摂動が与えられている（図 3.16 (i) 右）．対流圏下層（図 3.16 (ii)）では台風に伴う循環によって南東側から流入する暖湿流が弱められている．中上層の摂動振幅が下層と比較して小さいのは前節で述べた通りである．

摂動を付与した実験の結果を図 3.17 に示す．予報進路（図 3.17 (i)）を比較すると前半から進路に差が出ており，摂動付与実験では西偏傾向が弱まって上陸位置が実況に近づいている．これは感度解析の結果（図 3.11 (ii) の逆符号）と整合的である．一方台風強度（図 3.17 (ii)）は摂動を付与したことによってほぼ変化しておらず，進路の変化は台風自体ではなく環境場の変化によってもたらされていることが示唆される．

進路変化に寄与したと考えられる摂動に対する応答を図 3.18，3.19 に示す．初期の海面気圧応答は正だが，初期のジオポテンシャル高度は下層の寒冷化・乾燥化に対応して中上層は負の応答を示す（図 3.19 (i)）．摂動のエネルギーは時間発展とともに摂動を与えていない領域へと伝播していく．エネルギー伝播は全方向に見られるが，最も卓越するのは北東向きの伝播であり，台風には直接関係していないと考えられる．また地表から対流圏下層にかけて西向きの位相伝播が明瞭に見られ，その位相速度は図からおおよそ 220 km/h と推定される．これは鉛直波長 17 km の慣性重力波に相当する．この西向きの正位相伝播が台風中心と結びつき（図 3.18），高気圧性循環の北側に伴われる東向きの

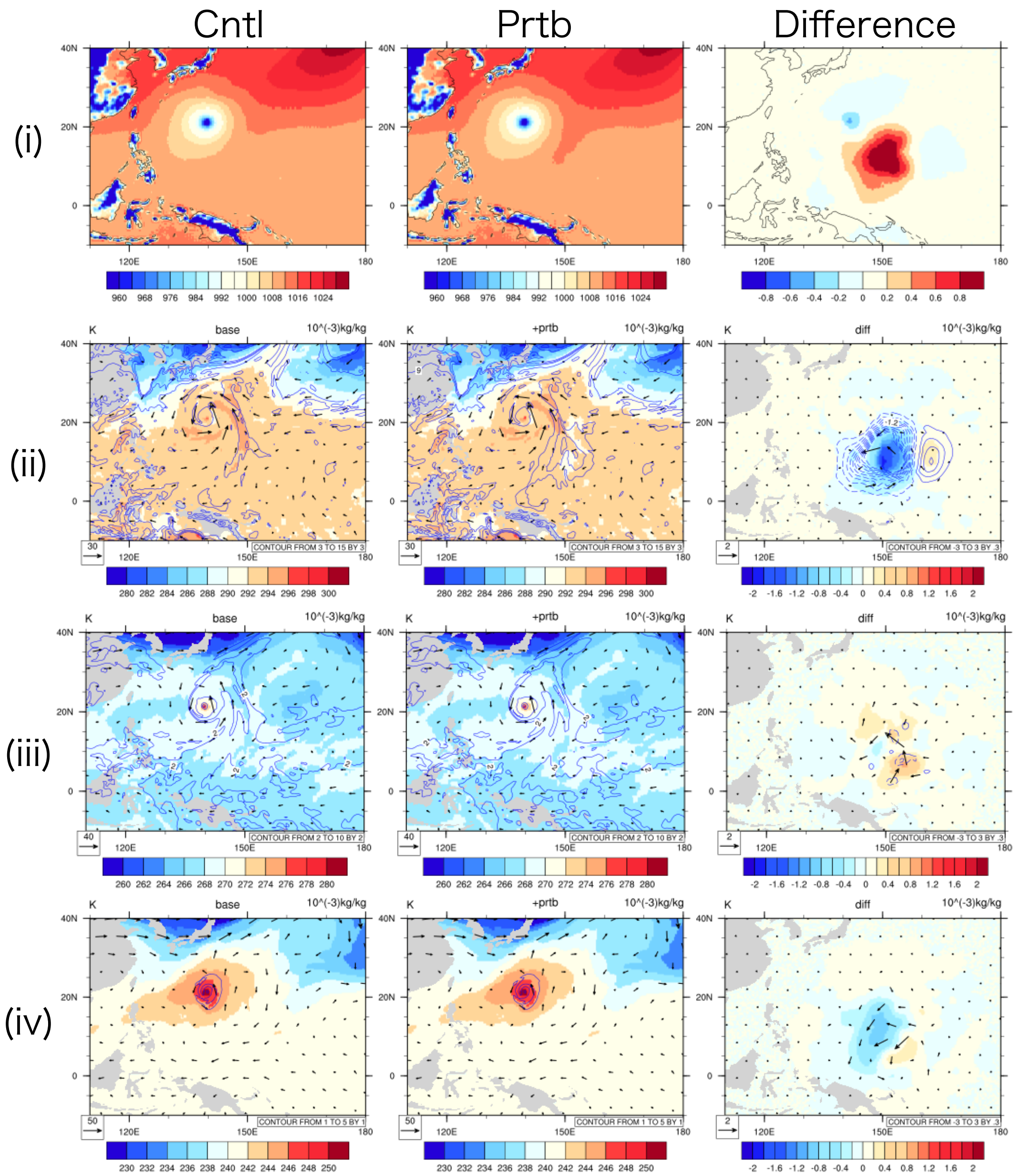

図 3.16: 感度実験における初期値．左がコントロール実験，中央が摂動付与実験の初期値であり，右は摂動付与実験からコントロール実験を引いた差を示す．(i) 地表気圧（hPa），(ii) 約 850 hPa 面，(iii) 約 500 hPa 面，(iv) 約 300 hPa 面を表す．(ii–iv) では陰影で気温（K），ベクトルで風（m/s，基準は左下），青の等値線（負は破線）で比湿（g/kg）を示している．

流れ偏差が台風を東に流す役割を果たしたと考えられる．この応答は予報前半の進路変化に対応すると思われるが，摂動応答には重力波に対応する速い伝播以外にも遅い伝播や停滞性の応答も含まれる．これらは予報後半の進路に影響を与えていることが考えられる．また今回は台風南東のリッジに着目して摂動を与えているが，感度解析では台風中心にも感度を示していた（図 3.10 (i)）．これらの摂動による台風進路への影響の切り分けも今後の課題である．

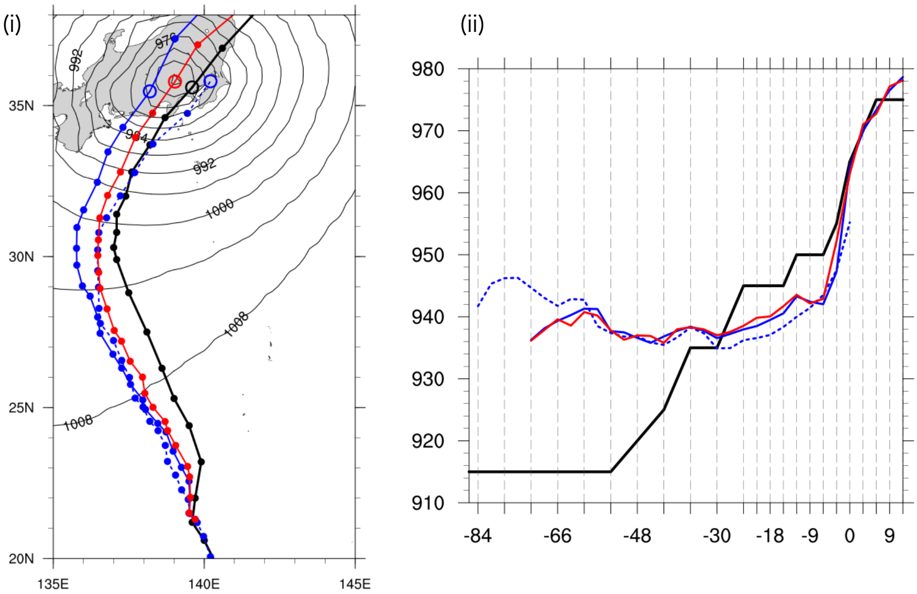

図 3.17: 感度解析の摂動に対する感度実験の (i) 進路と (ii) 中心気圧．青：コントロール実験（破線が 00 UTC 初期値，実線が 12 UTC 初期値），赤：摂動付与実験，黒：ベストトラック．(i) の等値線は摂動付与実験における 12 日 12 UTC の海面気圧を示している．(ii) の横軸は 12 日 12 UTC を基準とした時刻（単位は hour）を示す．

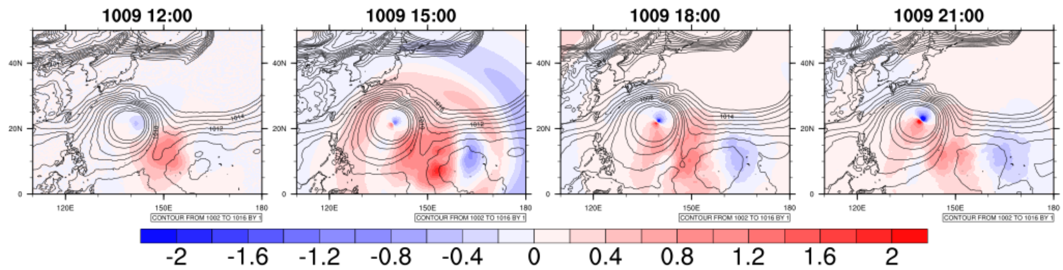

図 3.18: 摂動付与実験とコントロール実験の海面気圧（hPa）差の時間発展．等値線で摂動付与実験の値を，陰影で摂動付与実験からコントロール実験を引いた差を示す．

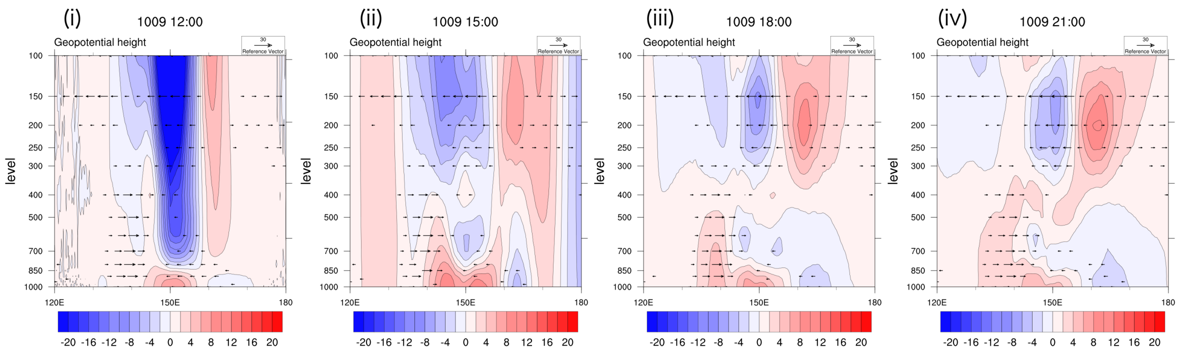

図 3.19: 北緯 10 度から 15 度で平均した摂動付与実験とコントロール実験のジオポテンシャル高度差（m）の経度ー高度断面．ベクトルは摂動付与実験の東西風を表す．

3.5 まとめ

本章では，2019 年台風第 19 号の進路の予測可能性をアンサンブル予報を用いて検証した．

まず主要 4 予報センター間での上陸位置の精度比較から，気象庁の予報精度が上陸 6 から 4 日前まで他のセンターと比較して非常に高かったことがわかった．この要因を台風速度の統計解析から考察すると，気象庁は他のセンターが持つ減速傾向を持っていなかったために上陸位置の誤差が小さかったことが示された．一方で予報初期時刻から上陸時刻までの平均進路誤差は他のセンターと比較して大差なく，予報期間全般における進路予報精度が突出して高かったわけではないことも明らかとなった．気象庁と他のセンターでの進行速度の傾向の違いについては，他の事例でも検討する価値があると思われる．

気象庁の上陸位置の予報精度は上陸 3 日前に急激に悪化していた．精度悪化前後の予報を比較すると，約 200 km 上陸位置が西偏していることがわかった．これに対応して上陸 2 日前の環境場の風には台風を北西に流す風が明瞭に現れていた．進路西偏の要因を特定するために，西偏が見られた時刻のアンサンブル予報を対象としてアンサンブル感度解析を行った．アンサンブル感度解析は成長の早い摂動を適切に捉えており，台風南東に最も大きな感度を示した．最大成長率を持つ摂動は台風南東の海面気圧を変え，かつ対流圏下層の空気塊の性質を気温と湿度に関して変える効果を持つ．線形発展した摂動は 24 時間後に台風中心を流す風を示し，上陸時刻には台風中心に対して北東ー南西方向の双極型の気圧摂動構造を持っていた．さらにアンサンブルメンバーの初期摂動を見ると，上陸位置の精度と高感度領域の符号に対応が見られた．これらのことから，感度解析は進路西偏と関係する摂動を捉えていると考えられる．実際の大気場を見ると高感度領域に対応して台風南東にリッジが存在し，さらにその南東では低気圧性擾乱が発達しながら西進していた．感度解析によって得られた摂動の符号との対応から，リッジが弱められたことで南東の低気圧性擾乱の西進が早まり，低気圧性擾乱の北側に伴われる流れが台風進路に影響を与えたことが示唆された．本研究で提示した誤差要因は Carr and Elsberry (2000) で指摘された要因のうち，熱帯低気圧間の間接的相互作用（図 1.1 (ii)）およびリッジの強度変化（図 1.1 (iii)）と構造は似ているが，彼らが考えていた構造よりも小さいスケールでありかつ時間変動していた点と，低気圧そのものではなく周辺のリッジの予報精度が鍵を握っていたという点で新たな解釈を与える．

最後に感度解析で得られた摂動が実際に台風進路に影響を与えることを，気象庁 GSM を用いた感度実験で検証した．本研究では現業決定論よりも低解像度での実験を行なったが，再現実験の結果は現業決定論予報の進路をよく再現していた．感度解析の摂動を初期値に加えた実験は，現業と同一の初期値を用いたコントロール実験と比べて予報前半から進路の西偏傾向が弱まり，上陸位置がより実況に近づいていた．摂動の付与により台風強

度はほとんど変化せず，このことは摂動付与実験で見られた進路変化が環境場の変化に起因するものであったことを裏付けている．摂動に対する応答のうち伝播の速いものは傾圧重力波に相当し，エネルギー伝播は北東向き，位相伝播は西向きが卓越していた．予報前半の進路変化は，地表から下層にかけて与えた西向きに伝播する正の摂動に伴う東向きの流れ偏差によるものであったと考えられる．予報後半の進路変化に対応すると思われるより伝播の遅い応答の解析や，それぞれの摂動による台風進路への影響の定量的評価は今後の課題である．

本章の解析および実験結果から，アンサンブル感度解析が熱帯低気圧進路の力学的な誤差要因を特定しうることが示された．

第 II 部

アンサンブル手法による非線形・積算型観測の同化

第 4 章

アンサンブルデータ同化

本章では第 5，6 章の実験で用いたアンサンブルデータ同化手法について解説する．データ同化では，数値予報モデルによる予報値（第一推定値）と観測値をそれぞれの誤差統計量を考慮して組み合わせることで，精度が高く時空間方向に滑らかな解析値を作成する．データ同化のアプローチは，解析値を予報値と観測値の重みつき平均で求める手法（カルマンフィルタ）と，解析誤差統計量を表すコスト関数の最適化で求める手法（変分法）に大きく二分される．この後の導出に共通する数学記号を以下に示す．

N_{s}	状態変数の次元
N_{o}	観測数
N_{e}	アンサンブルサイズ
$\mathbf{x}^{\mathrm{f}} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}}}$	予報値
$\mathbf{x}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}}}$	解析値
$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{o}}}$	観測値
$\mathbf{P}^{\mathrm{f}} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{s}}}$	予報誤差共分散
$\mathbf{P}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{s}}}$	解析誤差共分散
$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{o}} \times N_{\mathrm{o}}}$	観測誤差共分散
$H : \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}}} \mapsto \mathbb{R}^{N_{\mathrm{o}}}$	観測演算子
$M_{t_0 \to t_1} : \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}}} \mapsto \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}}}$	予報モデルによる時刻 t_0 から t_1 までの時間発展演算子
$\mathbf{I}_N$	N 次単位行列

第一推定値となるひとつ前の解析値からの予報は以下の式で表される．

$$\mathbf{x}_i^{\mathbf{f}} = M(\mathbf{x}_{i-1}^{\mathbf{a}}) \tag{4.1}$$

ここで下付き添え字 i は時刻のインデックスを示し，省略する場合は式中の変数が全て同じ時刻であるとする．また簡単のため，モデルの誤差は無視する．

4.1 アンサンブルカルマンフィルタ

本節ではカルマンフィルタをベースとしたアンサンブル同化手法を解説する．

4.1.1 カルマンフィルタ

まず前提となっているカルマンフィルタについて説明する．解析値が以下のように第一推定値と観測値の重みつき平均で表されるとする．

$$\mathbf{x}^{\mathrm{a}} = \mathbf{x}^{\mathrm{f}} + \mathbf{K}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}})] \tag{4.2}$$

$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{o}}}$ は予報と観測の誤差統計から求まる重みを表す行列であり，カルマンゲインと呼ばれる．式 (4.2) の両辺から真値 $\mathbf{x}^t$ を引き，予報誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}} = \mathbf{x}^{\mathrm{f}} - \mathbf{x}^t$，解析誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{a}} = \mathbf{x}^{\mathrm{a}} - \mathbf{x}^t$，観測誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{o}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^t = \mathbf{y} - H(\mathbf{x}^t)$ とおくと，

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}} + \mathbf{K}[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{o}} - \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}}] \tag{4.3}$$

と変形できる．ただし観測演算子の非線形性が弱いと仮定し，$H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}}) - H(\mathbf{x}^t) \approx \mathbf{H}(\mathbf{x}^{\mathrm{f}} - \mathbf{x}^t) = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}}$ と近似している．この解析誤差の式から解析誤差共分散 $\mathbf{P}^{\mathrm{a}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}} \rangle$（$\langle \cdot \rangle$ は期待値）を計算する．

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{\mathrm{a}} &= \langle \{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}} + \mathbf{K}[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{o}} - \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}}]\}\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}} + \mathbf{K}[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{o}} - \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}}]\}^{\mathrm{T}} \rangle \\
&= (\mathbf{I}_{N_{\mathrm{s}}} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}^{\mathrm{f}}(\mathbf{I}_{N_{\mathrm{s}}} - \mathbf{K}\mathbf{H})^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ただし $\mathbf{P}^{\mathrm{f}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}} \rangle$，$\mathbf{R} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{o}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}} \rangle$ であり，予報誤差と観測誤差は無相関（$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{o}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}} \rangle = 0$）を仮定している．$\mathbf{K}$ は解析誤差分散を表す $\mathrm{trace}(\mathbf{P}^{\mathrm{a}})$ を最小にするように定める．$\mathrm{trace}(\mathbf{P}^{\mathrm{a}})$ が最小となるためには,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \mathrm{trace}(\mathbf{P}^{\mathrm{a}}) = 0$$

を満たす必要がある．式 (4.4) と行列の微分公式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \mathrm{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \mathrm{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) &= 2\mathbf{A}\mathbf{B}
\end{aligned}$$

より，

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \mathrm{trace}(\mathbf{P}^{\mathrm{a}}) = -2\mathbf{P}^{\mathrm{f}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + 2\mathbf{K}(\mathbf{H}\mathbf{P}^{\mathrm{f}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}) = 0 \tag{4.5}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^{\mathrm{f}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}\mathbf{P}^{\mathrm{f}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R})^{-1} \tag{4.6}$$

として $\mathbf{K}$ が求められる．また式 (4.6) を式 (4.4) に代入すると，

$$\mathbf{P}^{\mathrm{a}} = (\mathbf{I}_{N_{\mathrm{s}}} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^{\mathrm{f}} \tag{4.7}$$

を得る．すなわち，式 (4.2)，(4.6)，(4.7) より解析値と解析誤差共分散を得ることができる．また次の時刻の予報誤差共分散は，式 (4.1) より誤差の時間発展が時間発展の接線形演算子

$$\mathbf{M} = \left.\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\mathrm{a}}}$$

（時刻のインデックスは省略）を用いて

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{f}} \approx M(\mathbf{x}^{\mathrm{a}}) - M(\mathbf{x}^t) \approx \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^{\mathrm{a}}$$

と近似できることから，以下のように求められる．

$$\mathbf{P}_i^{\mathrm{f}} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{i-1}^{\mathrm{a}}\mathbf{M}^{\mathrm{T}} \tag{4.8}$$

以上の解析–予報サイクルで逐次的に同化を行うカルマンフィルタは，線形のモデルと観測に対する最適解を与える．しかし非線形性の強いモデルや観測に対して適用した場合（拡張カルマンフィルタ），得られる解は必ずしも最適解とはならない．

4.1.2　アンサンブルカルマンフィルタ

カルマンフィルタは非線形モデルへの対応だけでなく，誤差共分散の計算コストの高さが現実大気への応用において課題となっている．例として，気象庁の現業全球モデルの状態変数次元は $1920 \times 960 \times 128 \sim O(10^8)$ であり，誤差共分散のサイズは $O(10^{16})$ となる．このような巨大なサイズの行列の時間発展を式 (4.8) で直接計算するのは困難であり，また直接メモリに保持するのも難しい．そこで初期値を少しずつずらした複数の予報（アンサンブル予報）から推定した誤差共分散を利用する同化手法が現実大気モデルへの応用で主流となってきている．アンサンブルによる誤差共分散の推定は以下の式で表される．

$$\mathbf{P}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{N_{\mathrm{e}}-1}\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{e}}}(\mathbf{x}^{\mathrm{f}(k)} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}})(\mathbf{x}^{\mathrm{f}(k)} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}})^{\mathrm{T}} \tag{4.9}$$

上付き添え字の括弧内の数字はアンサンブルメンバーのインデックスであり，$\overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}} = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{e}}} \mathbf{x}^{\mathrm{f}(k)}/N_{\mathrm{e}}$ はアンサンブル平均を表す．アンサンブルを用いた同化手法は巨大な誤差共分散行列を直接保持しないことで，解析に必要なメモリを削減するだけでなく，カルマンフィルタにおける線形性の仮定を緩和することもできる．

アンサンブルカルマンフィルタではアンサンブル平均を解析変数とすることが多いため以降の導出でもそれに従うが，アンサンブルメンバーと独立な予報（コントロールラン）

を解析変数にとることもできる．アンサンブルメンバーの平均からのずれ（アンサンブル摂動）を列ベクトルとするアンサンブル摂動行列を以下のように定義する．

$$\mathbf{X}^{\mathrm{f}} = \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{e}}-1}} \left[\mathbf{x}^{\mathrm{f}(1)} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}}, \cdots, \mathbf{x}^{\mathrm{f}(N_{\mathrm{e}})} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}} \right] \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{e}}} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{P}^{\mathrm{e}} = \mathbf{X}^{\mathrm{f}} (\mathbf{X}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}} \tag{4.11}$$

アンサンブル摂動行列は列方向の平均が 0 であるため，その列ベクトルで張られる空間（アンサンブル空間）の自由度は高々 $N_{\mathrm{e}} - 1$ である．従って $\mathbf{P}^{\mathrm{e}}$ のランクの上限も $N_{\mathrm{e}} - 1$ となる．式 (4.6) の $\mathbf{P}^{\mathrm{f}}$ を式 (4.11) で置き換えることにより，

$$\mathbf{K} = \mathbf{X}^{\mathrm{f}} (\mathbf{H}\mathbf{X}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}} \{ \mathbf{H}\mathbf{X}^{\mathrm{f}} (\mathbf{H}\mathbf{X}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}} + \mathbf{R} \}^{-1} = \mathbf{X}^{\mathrm{f}} \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} (\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}})^{-1} \mathbf{R}^{-1/2} \tag{4.12}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{X}^{\mathrm{f}} \tag{4.13}$$

と表すことができる．ここで $\mathbf{Z}$ は観測誤差で規格化した観測空間のアンサンブル摂動行列であり，接線形演算子を用いずに以下のように近似計算できる．

$$[\mathbf{Z}]_k \approx \mathbf{R}^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{e}}-1}} \left[H\left(\mathbf{x}^{\mathrm{f}(k)} \right) - \overline{H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}})} \right] \tag{4.14}$$

$[\mathbf{Z}]_k$ は行列 $\mathbf{Z}$ の k 列目を示す．この近似式を用いることで観測演算子の接線形近似を避け，接線形近似で落とされる高次項の寄与を考慮することができる．ここで右辺の括弧内の第 2 項について，平均をとる操作と観測演算子を作用させる操作の順番を変えた以下の定式化もありうる．

$$[\mathbf{Z}]_k \approx \mathbf{R}^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{e}}-1}} \left[H\left(\mathbf{x}^{\mathrm{f}(k)} \right) - H\left(\overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}} \right) \right] \tag{4.15}$$

式 (4.14) と (4.15) は観測演算子が線形の場合は一致し，また非線形性が弱い場合にはその差は無視出来る．しかし観測演算子が強い非線形性を含む場合，後者は行列 $\mathbf{Z}$ の列方向の平均が 0 にならず，元々のアンサンブル摂動行列とは異なる性質を持つ．そのためどちらの定式化を用いるかで同化手法の振る舞いが大きく異なり，解析結果に影響を与える．この現象については第 5 章で実際の実験結果に基づいて取り上げる．

式 (4.2) と (4.12) から，アンサンブル平均の解析値は以下のように与えられる．

$$\overline{\mathbf{x}^{\mathrm{a}}} = \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}} + \mathbf{X}^{\mathrm{f}} \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} (\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}})^{-1} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{d} \tag{4.16}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{y} - \overline{H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}})} \tag{4.17}$$

解析誤差共分散は予報誤差共分散と同様に解析アンサンブルから推定されるものとする．

$$\mathbf{X}^{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{e}}-1}} \left[\mathbf{x}^{\mathrm{a}(1)} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{a}}}, \cdots, \mathbf{x}^{\mathrm{a}(N_{\mathrm{e}})} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{a}}} \right] \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{e}}} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{P}^{\mathrm{a}} = \mathbf{X}^{\mathrm{a}} (\mathbf{X}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}} \tag{4.19}$$

ここでアンサンブルメンバーの解析値も式 (4.16) で求められると仮定すると，

$$\mathbf{x}^{\mathrm{a}(k)} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{a}}} = \mathbf{x}^{\mathrm{f}(k)} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}} + \mathbf{K}[\overline{H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}})} - H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}(k)})]$$

より，

$$\mathbf{X}^{\mathrm{a}} \approx (\mathbf{I}_{N_{\mathrm{s}}} - \mathbf{KH})\mathbf{X}^{\mathrm{f}}$$

となるから，式 (4.19) に代入して

$$\mathbf{P}^{\mathrm{a}} = (\mathbf{I}_{N_{\mathrm{s}}} - \mathbf{KH})\mathbf{P}^{\mathrm{f}}(\mathbf{I}_{N_{\mathrm{s}}} - \mathbf{KH})^{\mathrm{T}}. \tag{4.20}$$

上式と式 (4.4) を比較すると，観測誤差に基づく項（$\mathbf{KRK}^{\mathrm{T}}$）が落ちてしまっていることがわかる．これは解析誤差の過小評価につながる．従ってアンサンブルメンバーの解析値はアンサンブル平均と別の方法で求める必要がある．

これまでに解析誤差が式 (4.4) を満たすように観測に摂動を加える摂動観測法 (Houtekamer and Mitchell, 1998) や，解析誤差共分散が式 (4.4) または (4.7) を満たすような解析アンサンブル摂動行列 $\mathbf{X}^{\mathrm{a}}$ を，予報アンサンブル摂動行列 $\mathbf{X}^{\mathrm{f}}$ を変換して求める平方根フィルタ (Anderson, 2001; Bishop et al., 2001; Whitaker and Hamill, 2002) が提案されてきた．本研究ではアンサンブル変換カルマンフィルタ（Ensemble Transform Kalman Filter, ETKF）を用いる (Bishop et al., 2001).

まずアンサンブルカルマンフィルタのカルマンゲイン (4.12) を $\mathbf{P}^{\mathrm{f}} = \mathbf{P}^{\mathrm{e}}$ とした式 (4.7) に代入して変形する．

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{\mathrm{a}} &= (\mathbf{I}_{N_{\mathrm{s}}} - \mathbf{X}^{\mathrm{f}}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{ZZ}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}})^{-1}\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{H})\mathbf{P}^{\mathrm{e}} \\
&= \mathbf{X}^{\mathrm{f}}(\mathbf{I}_{N_{\mathrm{e}}} - \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{ZZ}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}})^{-1}\mathbf{Z})(\mathbf{X}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}} \\
&= \mathbf{X}^{\mathrm{f}}(\mathbf{I}_{N_{\mathrm{e}}} - \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Z})(\mathbf{X}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}} \\
&= \mathbf{X}^{\mathrm{a}}(\mathbf{X}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$\mathbf{D} = \mathbf{ZZ}^{\mathrm{T}} + \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}}$ は $N_{\mathrm{o}} \times N_{\mathrm{o}}$ の行列である．上式から，$\mathbf{X}^{\mathrm{a}} = \mathbf{X}^{\mathrm{f}}\mathbf{T}$ と表されるとき，

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I}_{N_{\mathrm{e}}} - \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Z})^{1/2} \tag{4.22}$$

を満たす．ただし行列 $\mathbf{A}$ の平方根行列 $\mathbf{A}^{1/2}$ は以下のように定義される．

$$\mathbf{A}^{1/2}(\mathbf{A}^{1/2})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$$

現実大気では観測数 N_{o} は予報変数次元よりは遥かに小さいが，それでも $O(10^5)$ 程度であり，$\mathbf{D}$ の逆行列を直接求める計算コストはかなり大きくなる．そこで Bishop et al. (2001) では行列のランクが $N_{\mathrm{e}} - 1$ 以下であることを利用し，計算コストを減らした変換行列の導出方法を考案した．彼らは逆行列に対する Sherman-Morrison-Woodbury の公式 (Golub and Van Loan, 2013)

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BC}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I}_k + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1} \tag{4.23}$$
$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times k}\ (n \gg k)$$

において，$\mathbf{A} \to \mathbf{I}_{N_\mathrm{o}}$，$\mathbf{B}, \mathbf{C} \to \mathbf{Z}$ と置き換える変形を行った．

$$\mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{I}_{N_\mathrm{o}} + \mathbf{Z}\mathbf{Z}^\mathrm{T})^{-1} = \mathbf{I}_{N_\mathrm{o}} - \mathbf{Z}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^\mathrm{T} \tag{4.24}$$

式 (4.24) の右辺では逆行列の次元が $N_\mathrm{e} \times N_\mathrm{e}$ となる．これより

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} - \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Z} &= \mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} - \mathbf{Z}^\mathrm{T}\{\mathbf{I}_{N_\mathrm{o}} - \mathbf{Z}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^\mathrm{T}\}\mathbf{Z} \\
&= \mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} - \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z}\{\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} - (\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z}\} \\
&= \mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} - \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z})^{-1} \\
&= (\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z})^{-1}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

と変形できる．なお，式 (4.25) の 2 行目から 3 行目，3 行目から 4 行目への変形には以下の等式を利用した．

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} &= (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}) - (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A} - \mathbf{A}) \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \\
\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} &= (\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{A} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}
\end{aligned}$$

変換行列は $\mathbf{Z}$ の特異値分解 $\mathbf{Z} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathrm{T}$ （$\boldsymbol{\Sigma}$ は特異値を対角成分とする対角行列，$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$ はそれぞれ左特異ベクトルと右特異ベクトルから構成される行列）から以下のように与えられる．

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \boldsymbol{\Sigma}^2)^{-1/2}\mathbf{O} \tag{4.26}$$

ここで $\mathbf{O}$ は任意の直交行列である．すなわち変換行列は一意に定まらないが，後の研究で $\mathbf{O} = \mathbf{V}^\mathrm{T}$ と取る（変換行列を対称行列に取る）と，アンサンブル摂動行列のランクを保存するため望ましいことが示された (Hunt et al., 2007)．そのため以下では変換行列は対称行列として定義する．この変換を用いると，カルマンゲインの式 (4.12) は以下のようにも表すことができる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \mathbf{X}^\mathrm{f}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1/2} \\
&= \mathbf{X}^\mathrm{f}\mathbf{V}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \boldsymbol{\Sigma}^2)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1/2}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

ETKF の解析の式を以下にまとめる．

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathrm{T} \tag{4.28}$$

$$\overline{\mathbf{x}^\mathrm{a}} = \overline{\mathbf{x}^\mathrm{f}} + \mathbf{X}^\mathrm{f}\mathbf{V}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \boldsymbol{\Sigma}^2)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{d} \tag{4.29}$$

$$\mathbf{X}^\mathrm{a} = \mathbf{X}^\mathrm{f}\mathbf{V}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \boldsymbol{\Sigma}^2)^{-1/2}\mathbf{V}^\mathrm{T} \tag{4.30}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{a}(k)} = \overline{\mathbf{x}^\mathrm{a}} + \sqrt{N_\mathrm{e} - 1}[\mathbf{X}^\mathrm{a}]_k \tag{4.31}$$

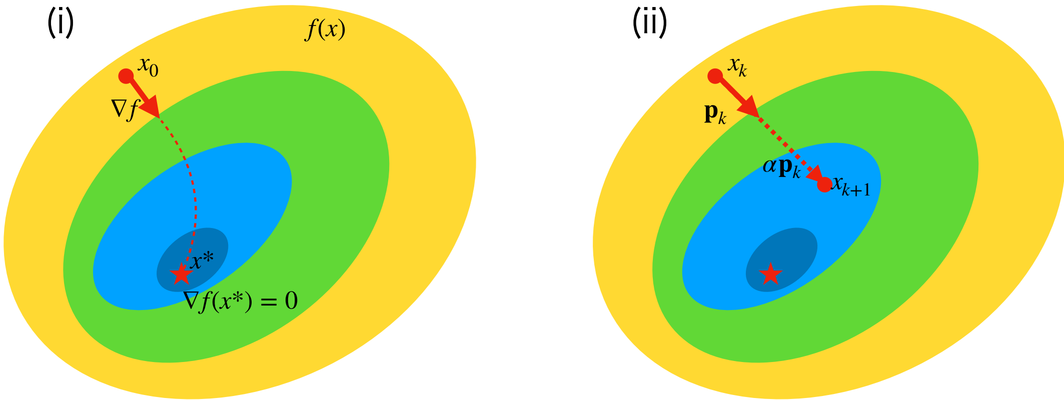

図 4.1: (i) 数値最適化の概念図．(ii) 線形探索による最適化アルゴリズムの概念図．

4.2 アンサンブル変分法

本節では変分法をベースとしたアンサンブル同化手法について解説する．

4.2.1 数値最適化

変分法自体の解説に入る前に，変分法による解析で必要となる数値最適化について本節で述べる．本節の内容は Nocedal and Wright (2006) および Navon and Legler (1987) を参考にしている．数値最適化は評価関数の最小値（最大値）を反復的に求めるアルゴリズムである．最小値は関数の勾配が 0 になる点として求められる（図 4.1 (i)）．本研究では降下方向を求めるアルゴリズム（共役勾配法，準ニュートン法，ニュートン法）とその方向に進む幅を定めるアルゴリズム（線形探索法）を組み合わせて用いる．線形探索による最適値探索の概念図を図 4.1 (ii) に示す．

探索の手順は以下のようになる．

1. 初期の推定位置 $\mathbf{x}_0$ を定め，$k = 0$ に初期化する．
2. $k < K_{\max}$（$K_{\max}$ は最大反復回数）の間，
   (a) 現在の推定位置で得られる関数値や勾配などの情報をもとに，降下方向 $\mathbf{p}_k$ を定める．
   (b) 降下方向から進む距離 $\alpha \|\mathbf{p}_k\|$ を決める α を定める．
   (c) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k$ として次の推定位置を求める．
   (d) 勾配 $\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})$ を計算し，$\|\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})\| < \varepsilon$（$\varepsilon \ll 1$ はあらかじめ定めた閾値）を満たす場合反復を終了する．満たさない場合は (a) に戻る．

4.2.1.1　降下方向の決定

本節では手順 2a において降下方向を決定する手法について解説する．

- ニュートン法
  関数のヘシアン（二階微分）$\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ が容易に得られる場合，ニュートン方程式
  $$\mathbf{p}_k = -(\nabla^2 f(\mathbf{x}_k))^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_k) \tag{4.32}$$
  を解いて降下方向を求める．ニュートン法による降下方向はヘシアンが正定値対称行列の場合は常に降下方向となり，評価関数が 2 次関数の場合は勾配のみを用いる手法と比較して速い収束率（2 次収束）を持つ．本研究で用いるアンサンブル変分法ではヘシアンの正定値対称性が保証されているためニュートン法を適用することができる．
- 準ニュートン法
  ヘシアンを求めるのが難しい場合やヘシアンの条件数が悪くニュートン方程式を解くのが難しい場合は近似的に求めたヘシアンに対してニュートン方程式を解く．この考え方を用いる手法を準ニュートン法（quasi-Newton method）と呼ぶ．ヘシアンの近似値 $\mathbf{B}$ を反復的に求める更新式として，BFGS（Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno）式
  $$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \frac{1}{\mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_k\mathbf{s}_k}\mathbf{B}_k\mathbf{s}_k\mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_k + \frac{1}{\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_k}\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}} \tag{4.33}$$
  $$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \tag{4.34}$$
  $$\mathbf{y}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k) \tag{4.35}$$
  がある．実際の探索では $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}, \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \alpha_0\nabla f(\mathbf{x}_0)$（$\mathbf{I}$ は単位行列，α_0 は最急降下方向へのステップ幅）と初期化し，更新した $\mathbf{B}_{k+1}$ を用いて
  $$\mathbf{B}_{k+1}\mathbf{p}_{k+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})$$
  を解くことで次の降下方向を求める．準ニュートン法は評価関数が 2 次関数の場合，超一次収束性を持つ．本研究では大規模問題への適用を考慮して考案されたメモリ制限付き BFGS 法 (L-BFGS, Liu and Nocedal, 1989) を用いた[*1]．L-BFGS では $\mathbf{B}_k$ を陽に保持せず，過去の位置におけるベクトル $\mathbf{y}_l, \mathbf{s}_l$ ($l = k, k-1, \cdots, k-m$ m は近似に用いるベクトル数で通常 $O(1)$ 程度）を用いて $\mathbf{B}_{k+1}$ を計算する．
- 共役勾配法
  ニュートン法と（メモリ制限付きでない）準ニュートン法ではヘシアンまたはその

[*1] 使用コードは `http://users.iems.northwestern.edu/~nocedal/lbfgs.html` より取得した．

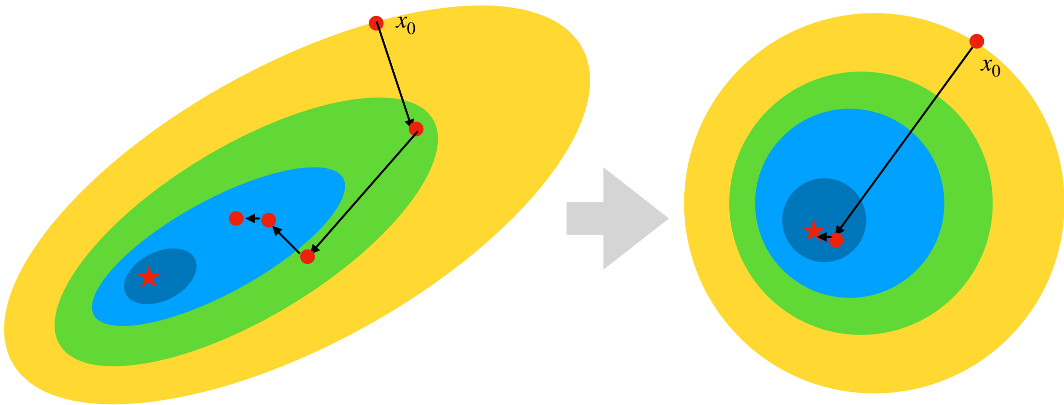

図 4.2: 前処理の概念図

近似の行列を保存するメモリが必要となる．共役勾配法では降下方向がヘシアンに対して共役性

$$\mathbf{p}_i^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{p}_j = 0 \ (i \neq j) \tag{4.36}$$

を持つように定めていく．評価関数が正定値対称なヘシアンを持つ 2 次関数の場合，共役性を満たす降下方向は一つ前の反復における勾配と降下方向，および現在の勾配から求めることができる．

$$\mathbf{p}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k) + \beta_k \mathbf{p}_{k-1} \tag{4.37}$$

$$\beta_k = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}}\nabla f(\mathbf{x}_k)}{\nabla f(\mathbf{x}_{k-1})^{\mathrm{T}}\nabla f(\mathbf{x}_{k-1})} \tag{4.38}$$

この更新式を用いることで，勾配と同じ次元の配列メモリのみで探索を行うことができる．評価関数に対する上記の条件が満たされるならば，共役勾配法は共役方向の数（高々制御変数次元 n）と同じだけの反復回数内で最小値に収束する．本研究ではこの手法を一般の非線形関数に拡張した非線形共役勾配法 (Fletcher and Reeves, 1964; Gilbert and Nocedal, 1992) を用いる*2．一般の非線形関数の場合は n 回での収束は保証されない．

共役勾配法では，評価関数のヘシアンが正定値に近くその固有値の大きさが一定に近い（条件数が小さい）ほど速く収束する．元の評価関数がこのような条件を満たさない場合に，制御変数を変換することで評価関数を変えて，ヘシアンの条件数を改善する処理を行うことがある（図 4.2）．このような処理をヘシアンの条件数改善のための前処理 (preconditioning, 以下前処理）と呼ぶ．本研究で用いたアンサンブル変分法での前処理の詳細は第 4.2.3 節で述べる．

*2 使用コードは `http://users.iems.northwestern.edu/~nocedal/CG+.html` より取得した．

4.2.1.2　線形探索法

本節では手順 2b においてステップ幅 α_k を定める線形探索法について説明する．理想的には降下方向の一次元最小化問題

$$\alpha_k = \min_{\alpha} \phi(\alpha)$$
$$\phi(\alpha) = f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k)$$

を正確に解くことが望ましいが，計算コストが大きくなる上，一般的な非線形関数の場合は降下方向の精度が低く極小解に陥るおそれがある．そのため反復的な最適化における線形探索は，関数値と勾配が小さくなる条件を満たすものを取り，なるべく少ない探索回数で見つけることを目的として構築されている．線形探索の際に課す条件として，本研究では強 Wolfe 条件

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + c_1 \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_k \tag{4.39}$$
$$|\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k)^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_k| \leq c_2 |\nabla f(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_k| \tag{4.40}$$

（$0 < c_1 < c_2 < 1$）を利用する（図 4.3）．強 Wolfe 条件は関数値に対する十分降下条件 (4.39) と勾配に対する曲率条件 (4.40) から構成される．十分降下条件 (4.39) の右辺は現在の関数値を切片とする傾き $c_1 \nabla f(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_k < 0$ の直線（図の $l(\alpha)$）を表しており，更新後の関数値が現在の関数値より下がることを要求する．定数 c_1 は小さい値を取ることが多く，本研究では最も一般的な $c_1 = 10^{-4}$ とした．曲率条件 (4.40) の左辺と右辺はそれぞれ更新後と現在の位置における $\phi(\alpha)$ の傾きの絶対値を示しており，更新後の傾きが現在よりも小さくなる（極小位置に近づく）ことを要求する．定数 c_2 はニュートン法または準ニュートン法を用いるときは 0.9，共役勾配法を用いるときは 0.1 とした (Nocedal and Wright, 2006)．両方の条件を満たすステップ幅 α の範囲が図 4.3 で acceptable と示されている範囲である．なお，図では曲率条件として

$$\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k)^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_k \geq c_2 \nabla f(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_k$$

を用いる Wolfe 条件の例を示しているが，本研究で用いる強 Wolfe 条件では傾きが正で大きい範囲（図の acceptable 領域の右側）も棄却される．

このような条件を満たすステップ幅の探索アルゴリズムとして Moré and Thuente (1994) の探索アルゴリズムを利用した．このアルゴリズムはステップ幅の探索範囲の上限と下限を定め，$\phi(\alpha)$ に対して 2 次内挿と 3 次内挿を利用して探索範囲を狭めながら強 Wolfe 条件を満たすステップ幅を探索する．関数評価の回数が規定回数を超える，ステップ幅がほとんど 0 となる，または探索範囲の上限と下限が一致しても条件が満たされない場合は探索を終了する．両方の条件を満たすステップ幅が見つからなかった場合は，十分降下条件を満たすステップ幅を次善として用いる．

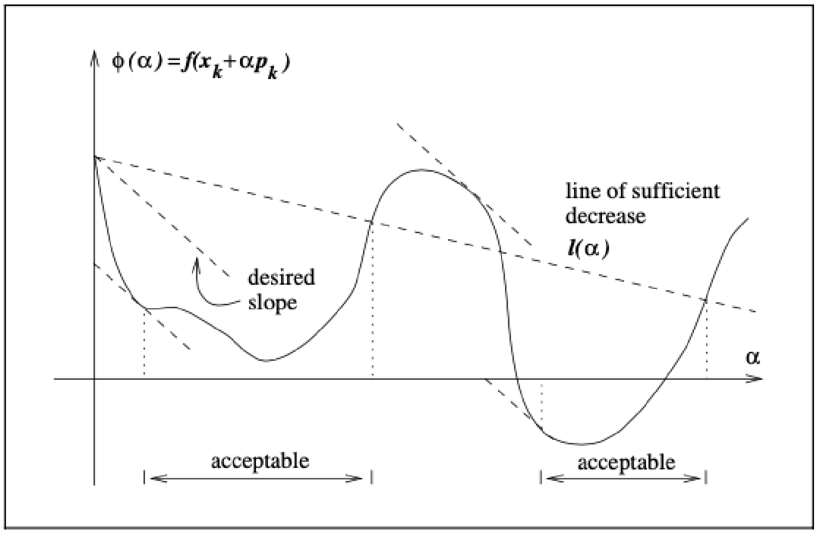

図 4.3: 線形探索法で用いられる Wolfe 条件．Nocedal and Wright (2006) Figure 3.5 より引用

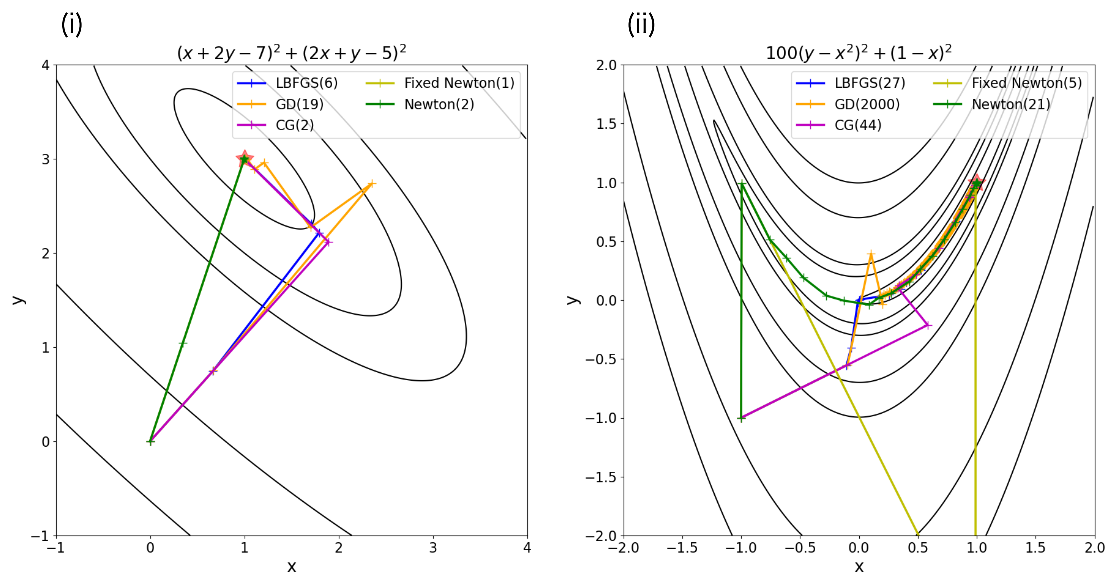

図 4.4: 最適化問題の例．(i) Booth 関数, (ii) Rosenbrock 関数．最小値を取る位置は (i) (1.0,3.0), (ii) (1.0,1.0) である．L—BFGS：メモリ制限付き BFGS 法，GD：最急降下法，CG：共役勾配法，Fixed Newton：ステップ幅固定ニュートン法，Newton：線形探索付きニュートン法を示す．手法名の後ろの数字は反復回数（最大 2000 回）を表す．

4.2.1.3 最適化の例

本節の最後に，これまでに説明した手法を用いて最適化問題を解いた例を示す．比較のために降下方向として勾配を用いる最急降下法（GD）と線形探索を行わずステップ幅を 1 に固定したニュートン法（Fixed Newton）の結果も示す．

図 4.4 (i) は歪んだ 2 次関数である Booth 関数

$$f(x,y) = (x+2y-7)^2 + (2x+y-5)^2$$

に対する最適化の結果を示している．勾配のみを使う手法（L-BFGS，CG，GD）では初期の降下方向は勾配方向と一致するため線が重なっているが，ステップ幅が異なるため CG の方がより最小値に近づき，2 回で収束している．L-BFGS は CG より短いステップ幅を選択するため反復回数が多くなっているが，GD の 3 分の 1 程度の反復回数で収束している．ニュートン法は完全に線が重なっており，Fixed Newton は一回の反復で収束する．線形探索をする場合は安全なステップ幅を選択するため一回反復回数が多いが，それでも高速に収束することがわかる．

図 4.4 (ii) にはバナナ型の溝を持つ 4 次関数である Rosenbrock 関数

$$f(x,y) = 100(y-x^2)^2 + (1-x)^2$$

に対する最適化の結果を示す．この関数は最適化手法のベンチマークとしてよく用いられる関数である．この例では GD が第一象限の溝に入った時点で停滞し始め，2000 回反復しても収束しない．L-BFGS と CG でも溝に入ってからの反復回数はかなり多いが，既定回数内で収束している．ステップ幅固定のニュートン法は一番収束までの反復回数が少ないが，一度関数が大きく増大する方向に進んでいる．線形探索を入れると関数値が下がるところに必ず留まるため，溝に沿って進んでいく様子がわかる．大規模な最適化問題を限られた時間で解く場合，必ずしも収束条件を満たさなくても既定回数で最適化を打ち切ることがある．線形探索をしない場合，打ち切られた段階で関数値が増大する位置に止まってしまうと解析に悪影響を与えるおそれがある．この例から，2 次以上の非線形関数の最適化における線形探索の重要性がわかる．本研究で用いた最適化手法では全てで線形探索を行う．

4.2.2 変分法

本節では変分法について説明する．

状態変数の確率分布 $p(\mathbf{x})$ と，ある時刻 i における観測の確率分布 $p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i)$ がともにガウス分布に従うと仮定する．

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\mathrm{f}})\right] \tag{4.41}$$

$$p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_i-H(\mathbf{x}_i))^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{y}_i-H(\mathbf{x}_i))\right] \tag{4.42}$$

ここで $\mathbf{B}$ は気候学的な予報誤差共分散（背景誤差共分散）を表す．時刻 $i=0,\cdots,I$ において，観測 $\mathbf{y}_i$ が得られたときの（初期時刻の）状態変数 $\mathbf{x}_0$ の確率分布 $p(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_{0,\cdots,I})$ を

考える．これは各時刻における観測が互いに独立であることを仮定すると，ベイズの定理

$$p(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_{0,\cdots,I}) = \frac{p(\mathbf{x}_0)\prod_{i=0}^{I} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i)}{\prod_{i=0}^{I} p(\mathbf{y}_i)} \tag{4.43}$$

より，

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_{0,\cdots,I}) &\propto p(\mathbf{x}_0)\prod_{i=0}^{I} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i) \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0^{\mathrm{f}}) - \sum_{i=0}^{I}\frac{1}{2}(\mathbf{y}_i - H(\mathbf{x}_i))^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{y}_i - H(\mathbf{x}_i))\right] \end{aligned} \tag{4.44}$$

と表される．変分法では $p(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_{0,\cdots,I})$ が最大となるような $\mathbf{x}_0$ を解析値とする．これは確率分布の自然対数で定義されるコスト関数

$$J(\mathbf{x}_0) = \log p(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_{0,\cdots,I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0^{\mathrm{f}})+\sum_{i=0}^{I}\frac{1}{2}(\mathbf{y}_i-H(\mathbf{x}_i))^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{y}_i-H(\mathbf{x}_i)) \tag{4.45}$$

を最小化する最適化問題に帰着する．この最適化問題が満たすべき条件は関数の勾配が 0 となる（$\nabla J = 0$）ことであり，勾配は以下の式で与えられる．

$$\nabla J = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{\mathrm{f}}) + \sum_{i=0}^{I}\mathbf{M}_{0\to i}^{*}\mathbf{H}^{*}\mathbf{R}_i^{-1}[H\{M_{0\to i}(\mathbf{x}_0)\} - \mathbf{y}_i] \tag{4.46}$$

ここで $\mathbf{M}_{0\to i}^{*}$ は時刻 0 から i までの時間発展演算子の随伴演算子（アジョイント），$\mathbf{H}$ と $\mathbf{H}^{*}$ は接線形観測演算子とそのアジョイントを表す．接線形演算子は全て第一推定値の周りでの微分で定義される．

$$\mathbf{H} = \left.\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\mathrm{f}}}$$
$$\mathbf{M} = \left.\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\mathrm{f}}}$$

アジョイントは二つの内積空間 $\mathscr{E}$，$\mathscr{F}$ とその間の線形変換 $\mathbf{L}:\mathscr{E}\mapsto\mathscr{F}$ に対して以下で定義される (Talagrand and Courtier, 1987).

$$(\mathbf{v}, \mathbf{L}\mathbf{u}) = \langle \mathbf{L}^{*}\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle \quad (\mathbf{u}\in\mathscr{E},\ \mathbf{v}\in\mathscr{F}) \tag{4.47}$$

$(\cdot), \langle\cdot\rangle$ はそれぞれ $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ における内積を表す．$(\cdot), \langle\cdot\rangle$ が共に標準内積のとき，$\mathbf{L}^{*} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}$ となる．

この関数 (4.45) と勾配 (4.46) に共役勾配法などの数値最適化手法を適用することで，最適解としての解析値を求める．変分法における解析誤差共分散は定常で，コスト関数のヘシアン

$$\nabla^2 J = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} \tag{4.48}$$

の逆行列となる (Barkmeijer et al., 1999; Lawrence et al., 2009).

解析値を求める時刻と同じ時刻に得られた観測のみを用いる場合を 3 次元変分法（3D-Var），上記の導出のように異なる時刻の観測も用いる場合を 4 次元変分法（4D-Var）と呼ぶ．変分法は式 (4.45) からわかるように，非線形のモデルや観測を陽に扱うことができるため，現在世界各国の予報機関で主流となっている同化手法である．しかし非線形性を陽に扱う場合，関数評価の計算コストが非常に大きくなるため，現業予報ルーチンの中で解析を行う上で現実的な時間スケールで最適化を収束させるのが難しくなる．そこで現業予報機関では状態変数そのものを制御変数にする代わりに，解析値と第一推定値の差（インクリメント）を制御変数とし，インクリメントが十分小さいという仮定の下で線形化を行っている (Courtier et al., 1994).

$$\Delta\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{\mathrm{f}} \simeq \mathbf{M}_{0\to i}\Delta\mathbf{x}_0 \tag{4.49}$$

$$J(\Delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{I}\frac{1}{2}(\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{d}_i)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{d}_i) \tag{4.50}$$

$$\nabla J(\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{I}\mathbf{M}_{0\to i}^{*}\mathbf{H}^{*}\mathbf{R}_i^{-1}[\mathbf{H}\mathbf{M}_{0\to i}\Delta\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i] \tag{4.51}$$

$\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i - H(\mathbf{x}_i^{\mathrm{f}})$ はイノベーションと呼ばれる．ヘシアンは式 (4.48) と等しい．インクリメントを制御変数とすることでコスト関数が厳密に 2 次関数形となり，収束性が大きく改善する．

第 4.2.1 章で述べたように，変分法における最適化の収束性はヘシアン (4.48) の条件数によって決まる．さらなる収束性向上のために，以下の式で表される前処理を行う．

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{*} \tag{4.52}$$

$$\Delta\mathbf{x}_i = \mathbf{U}\mathbf{v}_i \tag{4.53}$$

$$J(\mathbf{v}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_0 + \sum_{i=0}^{I}\frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{U}\mathbf{v}_i - \mathbf{d}_i)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{H}\mathbf{U}\mathbf{v}_i - \mathbf{d}_i) \tag{4.54}$$

$$\nabla J(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0 + \sum_{i=0}^{I}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}_{0\to i}^{*}\mathbf{H}^{*}\mathbf{R}_i^{-1}[\mathbf{H}\mathbf{M}_{0\to i}\mathbf{U}\mathbf{v}_0 - \mathbf{d}_i] \tag{4.55}$$

$\mathbf{U}$ は背景誤差共分散の力学的性質を考慮して作成される (Bannister, 2008a,b).

変分法では気候学的な誤差分布を用いるため，時空間的に変動する流れに依存した誤差分布は扱えないことが長年課題とされてきたが，近年では後述するアンサンブルを用いて推定した誤差共分散と組み合わせる（ハイブリッド変分法）ことで克服されてきている (Lorenc, 2003; Buehner, 2005)．しかし変分法は流れ依存性以外にも幾つかの課題を抱えている．例えばモデル及び観測演算子が微分可能であることを仮定しているため，第 1.2.1 節で述べたように観測演算子やモデル内に不連続性を含む場合に最適化が失敗することがある．また誤差分布がガウス分布に従うことを仮定しているが，水蒸気関連量など

の符号の制約を持つ変数に関する観測はガウス分布に従わないことが知られており，そのような変数の扱いも課題である．

4.2.2.1　変分法の実装例

本小節では 2 次元順圧渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta + f, \Delta^{-1}\zeta) \tag{4.56}$$

(ζ は相対渦度，f はコリオリパラメタ，$\Delta a = \nabla \cdot \nabla a$ は 2 次元ラプラシアン，$J(a,b) = \nabla a \times \nabla b$ はヤコビアン演算子）に対する変分法の実装例を示す (Talagrand and Courtier, 1987)．接線形モデルは (4.56) の ζ を $\zeta + \delta\zeta$ に置き換えた式から (4.56) を引くことで求められる．

$$\frac{\partial \delta\zeta}{\partial t} = J(\delta\zeta, \Delta^{-1}\zeta) + J(\zeta + f, \Delta^{-1}\delta\zeta) \tag{4.57}$$

アジョイントモデルを求めるには前述のように内積を定義する必要がある．ここでは全運動エネルギー

$$\langle \zeta, \zeta' \rangle = 2K = \int_{\Sigma} (\nabla\Delta^{-1}\zeta \cdot \nabla\Delta^{-1}\zeta') d\Sigma \tag{4.58}$$

($\int_{\Sigma} d\Sigma$ は地球表面での面積分を表す）を用いる．この内積に対して，ラプラシアン Δ 及びその逆変換 Δ^{-1} は自己随伴（演算子自身とアジョイントが一致する）

$$\langle \Delta\zeta, \zeta' \rangle = \langle \zeta, \Delta\zeta' \rangle$$
$$\langle \Delta^{-1}\zeta, \zeta' \rangle = \langle \zeta, \Delta^{-1}\zeta' \rangle$$

である．また任意のスカラー変数 α に対してヤコビアン $J(\delta\zeta, \alpha)$ のアジョイントは $\Delta J(\alpha, \Delta^{-1}\alpha)$ で与えられる．上記の性質および演算子の積のアジョイントは転置したアジョイントの積で与えられる（$(\mathbf{ML})^* = \mathbf{L}^*\mathbf{M}^*$）ことを利用すると，2 次元順圧渦度方程式のアジョイントモデルは以下のように求めることができる．

$$\frac{\partial \delta\zeta'}{\partial t} = \Delta J(\Delta^{-1}\delta\zeta', \Delta^{-1}\zeta) + J(\zeta + f, \Delta^{-1}\delta\zeta') \tag{4.59}$$

実際の計算では球面調和関数 $Y_n^m(\phi, \lambda)$ によるスペクトル展開を利用して差分化する．切断波数は 21（水平格子間隔約 540 km）とし，時間積分にはリープフロッグスキームを用いる．時間刻み幅は 1 時間とする．真値（の初期値）は解析解である東西波数 4，南北波数 1 の Rossby-Haurwitz 波

$$\begin{aligned}\zeta &= \Re\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\alpha Y_1^0 + \beta Y_5^4\right] \\ &= \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}[\sin\phi - 30\cos^4\phi\sin\phi\sin 4\lambda]\end{aligned}$$

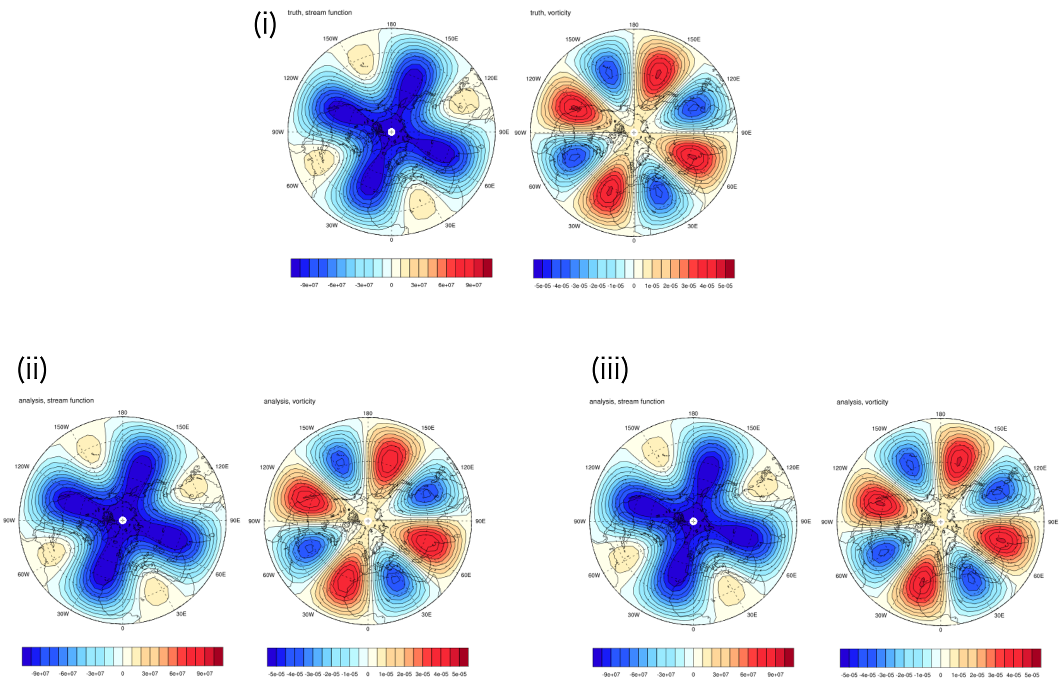

図 4.5: 変分法の例．(i) 真値の流線関数（左）と渦度（右），(ii) 12 時間後まで 1 時間ごとに観測を同化した場合の流線関数（左）と渦度（右），(iii) 12 時間後の観測を同化した場合の流線関数（左）と渦度（右）．

とする．この波は時間発展とともに自転軸に対して剛体回転し，α を自転角速度の約 10 分の 1（$7.27 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$）とすると 1 日で 9.55 度回転する波を表す．

簡単のためにコスト関数は観測項のみを考え，観測は真値そのもの（誤差なし）とする．実験は静止大気を初期値として，12 時間後までの毎時の渦度場を観測として与える

$$J = \sum_{t=0\mathrm{h}}^{t=12\mathrm{h}} \langle \zeta(t) - \zeta_{\mathrm{OBS}}(t), \zeta(t) - \zeta_{\mathrm{OBS}}(t) \rangle \tag{4.60}$$

場合と，12 時間後の渦度場のみを観測として与える

$$J = \langle \zeta(t = 12\mathrm{h}) - \zeta_{\mathrm{OBS}}(t = 12\mathrm{h}), \zeta(t = 12\mathrm{h}) - \zeta_{\mathrm{OBS}}(t = 12\mathrm{h}) \rangle \tag{4.61}$$

場合を考える．最適化手法には L-BFGS を用いた．結果を図 4.5 に示す．どちらの場合でも目視では確認できないほど真値を再現できていることがわかる．実際の変分法では背景項の影響や異なる要素の観測が入ることなどにより複雑化するが，この例のように観測の情報を適切に取り入れて大気場を再現することが出来る．

4.2.3　最尤法アンサンブルフィルタ

ハイブリッド変分法では制御変数（最適化の対象となる変数）を状態変数 $\mathbf{x}$ とするが，状態変数をアンサンブルの線形結合で表し制御変数を線形結合係数に置き換えることで，計

算量を大幅に減らした変分法も考案されている (Lorenc, 2003; Buehner, 2005; Zupanski, 2005; Liu et al., 2008)．このような変分法をアンサンブル変分法（EnVar）と呼ぶ．本研究ではアンサンブル変分法の一種である最尤法アンサンブルフィルタ（Maximum Likelihood Ensemble Filter, MLEF）[*3]を主な同化手法として用いる (Zupanski, 2005).

MLEF では EnKF と異なり，アンサンブルとは独立なコントロール予報に対して解析を行う．予報誤差共分散が以下のように分解できるとする．

$$\mathbf{P}^{\mathrm{f}} = \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}(\mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2})^{\mathrm{T}} \tag{4.62}$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2} = [\mathbf{p}_1^{\mathrm{f}}, \cdots, \mathbf{p}_{N_{\mathrm{e}}}^{\mathrm{f}}] \tag{4.63}$$

この式はサンプル共分散 (4.9) と似ているが，アンサンブル数によるスケーリングがない点が異なる．EnKF ではアンサンブル予報の各メンバーをサンプルとみなし，それらから誤差共分散を推定するモンテカルロ法に基づいた定式化であるのに対し，MLEF では KF における予報誤差共分散 (4.8) に基づき，解析誤差共分散がすでに規格化されているものとして扱う (Carrassi et al., 2009).

コスト関数を以下のように定義する（簡単のため観測は予報時刻にのみ得られるものとする）．

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{P}^{\mathrm{f}})^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{f}}) + \frac{1}{2}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x})]^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x})] \tag{4.64}$$

インクリメント $\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{f}}$ を (4.63) の列ベクトルの線形結合で表す．

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{f}} = \mathbf{p}_1^{\mathrm{f}} w_1 + \cdots + \mathbf{p}_{N_{\mathrm{e}}}^{\mathrm{f}} w_{N_{\mathrm{e}}} = \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}\mathbf{w} \tag{4.65}$$

アンサンブル結合係数 $\mathbf{w}$ を制御変数とするコスト関数と勾配，ヘシアンは以下のように与えられる．

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} + \frac{1}{2}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}} + \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}\mathbf{w})]^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}} + \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}\mathbf{w})] \tag{4.66}$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} J = \mathbf{w} - \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1/2}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x}^{\mathrm{f}} + \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}\mathbf{w})] \tag{4.67}$$

$$\nabla_{\mathbf{w}}^2 J = \mathbf{I}_{N_{\mathrm{e}}} + \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{Z}(\mathbf{x}) \tag{4.68}$$

ここで $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ は以下で定義される，観測誤差で規格化した観測空間の摂動行列である．

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{H}\mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2} = [\mathbf{z}_1(\mathbf{x}), \cdots, \mathbf{z}_{N_{\mathrm{e}}}(\mathbf{x})] \tag{4.69}$$

$$\mathbf{z}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{H}\mathbf{p}_k \tag{4.70}$$

$$\simeq \mathbf{R}^{-1/2}[H(\mathbf{x} + \mathbf{p}_k) - H(\mathbf{x})] \tag{4.71}$$

上式は EnKF (4.13, 4.15) と似ているが，$\mathbf{H}$ を $\mathbf{x}^{\mathrm{f}}$ ではなく $\mathbf{x}$ の周りで線形化する，または (4.71) の定式化を用いる場合は $\mathbf{Z}$ は状態変数 $\mathbf{x}$ の関数となり，最適化の反復ごとに変

[*3] 名称はフィルタであるが変分法に分類される．

化する．また (4.14) に対応する定式化は存在しない．(4.71) を用いることで，EnKF と同様に観測演算子の接線形近似を避けることができる．(4.67)，(4.68) は観測演算子の微分可能性を仮定しなくても同じ形式で導出することができるため，微分不可能な演算子も適切に扱える (Zupanski et al., 2008).

MLEF では制御変数次元がアンサンブル数と等しく，通常の変分法と比較して遥かに問題の次元が小さい．そのため収束性を向上させるための前処理にヘシアンを用いて，さらに厳密にコスト関数を 2 次関数形に近づけることができる．

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= [\nabla^2_{\mathbf{w}} J(\mathbf{0})]^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} = [\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{C}]^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{Z}^\mathrm{T}(\mathbf{x}^\mathrm{f})\mathbf{Z}(\mathbf{x}^\mathrm{f}) \end{aligned} \tag{4.72}$$

前処理行列は ETKF (4.26) と同様に固有値分解を用いて求めることができる．最終的に MLEF が扱うコスト関数は以下のようになる．

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathrm{f} + \mathbf{P}_\mathrm{f}^{1/2}[\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{C}]^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} \tag{4.73}$$

$$J(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^\mathrm{T}[\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{C}]^{-1}\boldsymbol{\zeta} + \frac{1}{2}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x})]^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x})] \tag{4.74}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\zeta}} J = [\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{C}]^{-1}\boldsymbol{\zeta} - [\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{C}]^{-1/2}\mathbf{Z}^\mathrm{T}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1/2}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x})] \tag{4.75}$$

(4.66) または (4.74) で定義したコスト関数を最小化する制御変数を適切な数値最適化手法を用いて求めた後，式 (4.65) に代入して解析値を計算する．

ヘシアン前処理を行うことで，共役勾配法などの勾配から最小値を求める最適化手法でも，ヘシアンの情報まで用いた最適化手法と同程度の収束性を得ることができる．観測演算子が線形の場合はコスト関数の等値面が超球面となり，最適化は一回の反復で収束する．また MLEF はアンサンブル空間で最適化を行うため，最適化問題の次元が通常の変分法よりもはるかに小さく，ヘシアンの評価が比較的容易である．そのためヘシアンの情報も用いる最適化手法を用いて前処理をせずに解析を行うことも可能である．ヘシアン前処理の有効性は観測演算子の非線形性が強い場合，第一推定値の近傍のみに限られるため，強非線形の観測を扱うときにはヘシアンまで用いる最適化手法が有効であると考えられる．そこで本研究では，最適化手法による性能の違いを見るために

1. ヘシアン前処理を行ったコスト関数 (4.74) に対して勾配情報を用いる最適化手法（共役勾配法，L-BFGS 法）を適用する
2. 前処理なしのコスト関数 (4.66) に対してヘシアンの情報まで用いる最適化手法（ニュートン法）を適用する

の 2 種類を実装し，比較を行った（第 5 章）．

解析誤差共分散（の平方根行列）は，コスト関数のヘシアンの逆行列がアンサンブル空間での解析誤差共分散に相当することを利用して，解析値で評価したヘシアンを用いて求

める．

$$\mathbf{P}_{\mathrm{a}}^{1/2} = \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}[\mathbf{I} + \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^{\mathrm{a}})\mathbf{Z}(\mathbf{x}^{\mathrm{a}})]^{-1/2} \tag{4.76}$$

線形の観測の場合，この更新式は ETKF の更新式 (4.30) と同様であるが，MLEF ではこの更新の際に規格化が行われていると考える．そのため解析アンサンブル摂動は $\mathbf{P}_{\mathrm{a}}^{1/2}$ の列ベクトルそのものであり，次のアンサンブル予報の初期値はこの解析アンサンブル摂動とコントロール解析から作成する．

$$\mathbf{x}^{\mathrm{f}} = M(\mathbf{x}^{\mathrm{a}}) \tag{4.77}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{f}(k)} = M(\mathbf{x}^{\mathrm{a}(k)}) = M(\mathbf{x}^{\mathrm{a}} + \mathbf{p}_k^{\mathrm{a}}) \tag{4.78}$$

$$\mathbf{p}_k^{\mathrm{f}} = M(\mathbf{x}^{\mathrm{a}(k)}) - M(\mathbf{x}^{\mathrm{a}}) \tag{4.79}$$

4.3　アンサンブル同化における局所化

アンサンブル同化における誤差共分散の推定精度はアンサンブル数に大きく制約される．第 1.2.2 節で述べたように，計算資源の制約上アンサンブルデータ同化で用いられるアンサンブルサイズ N_{e} は $O(10^1 \sim 10^2)$ 程度であり，予報変数の次元 N_{s} よりはるかに小さいため，このような少ないアンサンブルから推定した共分散は分散を過小評価したり，異なる位置間や異なる変数間に偽の相関を生み出したりする問題が生じる（サンプリング誤差）．本研究では主にサンプリング誤差に伴う偽相関への対応策として，局所化に焦点を当てる．なお，分散の過小評価に対しては，解析（または予報）誤差を人工的に膨張させる共分散膨張（inflation）が行われることが多い．共分散膨張には，誤差共分散を定数倍する乗算型（multiplicative inflation）や，アンサンブル摂動に乱数を加える加算型（additive inflation），解析アンサンブル摂動と予報アンサンブル摂動を混ぜる手法 (Zhang et al., 2004) などの種類がある．共分散膨張は解析精度に大きなインパクトを与えるが，その与え方に対する理論解は存在せず，扱う問題ごとに適切にチューニングする必要がある．本研究では共分散膨張には焦点を当てず，主に適切にチューニングした乗算型膨張を用いる．

本研究で重きを置く局所化は，第 1.2.2 節で述べたサンプリング誤差を緩和する効果とともに，アンサンブルの自由度を増やす効果も持つ．これは特に誤差成長の遅いモデルに対する同化を行う際に重要である．式 (4.16) や式 (4.65) からわかるように，アンサンブル同化で局所化を行わない場合，インクリメントは予報アンサンブル摂動の線形結合で作られるため，アンサンブル空間（アンサンブル摂動で張られる空間）で表現できないインクリメントは解析値に入らない．そのためアンサンブルの自由度が小さいと，観測が十分にそろっていても適切なインクリメントを作成できないおそれがある．

例として，東西一次元に簡略化した順圧渦度方程式を考える．

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \lambda} = -2\Omega\psi \tag{4.80}$$

ここで ψ は流線関数，λ は経度，$\Omega = 7.27 \times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$ は自転角速度を表す．この方程式は 2 次元順圧渦度方程式と同様に Rossby-Haurwitz 波

$$\psi(n, t, \lambda) = \psi_n(t_0) \exp[in\{\lambda - c_{\mathrm{RH}}(t - t_0)\}] \tag{4.81}$$

$$c_{\mathrm{RH}} = -\frac{2\Omega}{n^2} \tag{4.82}$$

（n は波数）を解析解に持つ安定な力学系である．真値を波数 4 とし，波数 3 の初期値（アンサンブル数 10）から真値を推定するデータ同化問題を扱う（図 4.6）．経度方向に 64 点（5.625 度ごと）に離散化し，1 時間ごとに 64 点全てに観測を与える．与える観測は真値に標準偏差 1.0 のホワイトノイズを加えて作成する．同化手法は MLEF と変分法（背景誤差共分散は誤差分散 1.0 の対角行列）を用いる． 図 4.7 に 24 時間同化した後の解析値

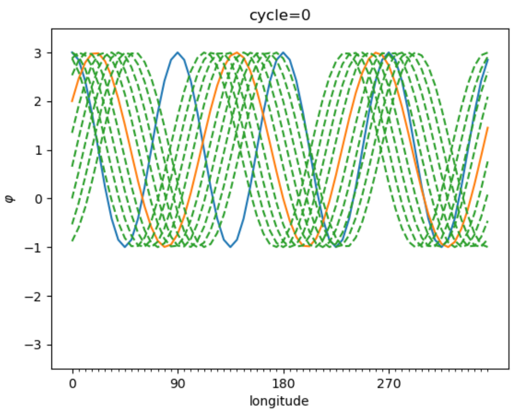

図 4.6: 一次元順圧渦度方程式に対するデータ同化問題の初期値．青：真値（波数 4），橙：変分法及び MLEF のコントロールランの初期値（波数 3），緑点線：アンサンブルの初期値（波数 3）

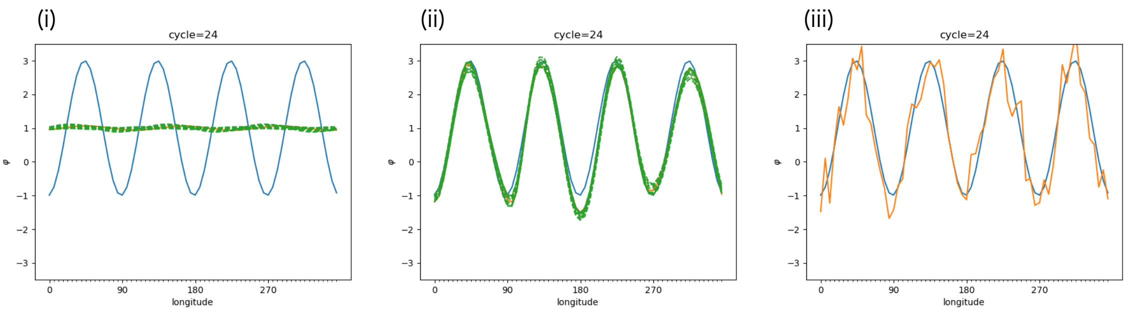

図 4.7: 24 時間後の解析値．(i) MLEF（局所化なし），(ii) MLEF（局所化あり），(iii) 変分法．MLEF の局所化は後で解説する観測空間局所化を用いている．

の分布を示す．アンサンブル同化手法である MLEF を用いて局所化を行わなかった場合，初期アンサンブルの空間に波数 4 の情報が含まれないため適切なインクリメントが作成できず，結果としてほぼ波数 0 の解析値及び解析アンサンブルが生じてしまう（図 4.7 (i)）．

局所化を導入すると，アンサンブル空間の自由度が増えて波数 4 のインクリメントを作成することができ，真値に近い分布を再現できている（図 4.7 (ii)）．アンサンブルでない変分法を用いると初期アンサンブルの制限がなく真値に近づけるが，背景誤差を適切に設定しないと流れに依存した情報を反映できず，ノイズの多い解析値を作成してしまう（図 4.7 (iii)）．この例からアンサンブル同化では適切に局所化を導入することによって，流れ依存性を活かした精度の良い解析値を作成できることがわかる．

4.3.1　局所化行列

局所化で用いられる局所化行列 $\mathbf{F}$ の要素 F_{ij} は，格子 i と格子 j 間の距離を r として，r とともに減衰する関数で構成される．簡単なのはガウス型

$$\mathrm{GA}(r|\sigma) = \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \tag{4.83}$$

（σ は局所化半径）であるが，一般的によく使われるのはガウス型を模した 5 次の Gaspari-Cohn 関数 (Gaspari and Cohn, 1999)

$$\mathrm{GC}(z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{5}{3}z^2 + \dfrac{5}{8}z^3 + \dfrac{1}{2}z^4 - \dfrac{1}{4}z^5 & (0 \le z < 1) \\ 4 - 5z + \dfrac{5}{3}z^2 + \dfrac{5}{8}z^3 - \dfrac{1}{2}z^4 + \dfrac{1}{12}z^5 - \dfrac{2}{3z} & (1 \le z < 2) \\ 0 & (2 \le z) \end{cases} \tag{4.84}$$

$$z = \frac{r}{c}$$

（c は局所化半径）である．Gaspari-Cohn 関数は局所化半径の 2 倍以上の距離では 0 になるため，ガウス型よりも数値計算上扱いやすい．式 (4.83) の σ と式 (4.84) の c の間には $\sigma \approx c\sqrt{3/10}$ の関係がある．2 つの関数の例を図 4.8 に示す．

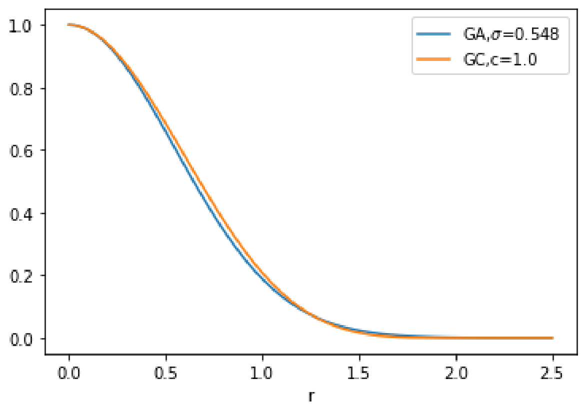

図 4.8: 局所化関数の例．青：ガウス（$\sigma = \sqrt{3/10}$），橙：Gaspari-Cohn（$c = 1.0$）

4.3.2 モデル空間局所化

予報誤差共分散に局所化を行う (Houtekamer and Mitchell, 2001).

$$\mathbf{P}^{\mathrm{e}} \to \mathbf{P}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{loc}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{P}^{\mathrm{e}} \tag{4.85}$$

局所化行列はモデル格子点間の距離に対して定義され，予報誤差共分散の非対角成分を直接落とす．変分法における予報誤差共分散の表記と対応させて，B-localization とも呼ばれる．予報変数の次元が大きくなると，直接計算は困難になる．

4.3.3 観測空間局所化

格子点ごとまたは解析領域を小領域に分割し，解析対象領域の周りの観測のみを同化する (Ott et al., 2004)．これは遠隔の観測の観測誤差を無限大とみなすことと等しく，R-localization とも呼ばれる．適用は比較的簡単で並列計算環境でのスケーリング性能が高いことが利点だが，観測と格子点の距離に応じて局所化するため観測同士の距離を考慮できない (Bowler et al., 2013)．また第 1.2.2.1 節でも述べたように，鉛直積算観測（各種放射量など）に対して適切に作用できないことも報告されている．

アンサンブルカルマンフィルタでは，カルマンゲインに局所化を行う手法も存在する (Houtekamer and Mitchell, 2001)．

$$\mathbf{K} \to \mathbf{K}_{\mathrm{loc}} = (\mathbf{F}_{\mathrm{s,o}} \circ (\mathbf{X}^{\mathrm{f}}\mathbf{Z}))(\mathbf{F}_{\mathrm{o}} \circ (\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}) + \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}})^{-1}\mathbf{R}^{-1/2} \tag{4.86}$$

局所化行列 $\mathbf{F}_{\mathrm{s,o}}$ は観測点とモデル格子点間の距離に対して，局所化行列 $\mathbf{F}_{\mathrm{o}}$ は観測点どうしの距離に対して定義されるが，直接的に遠隔の観測を制限するため観測空間局所化に分類される．カルマンゲインの表記と対応させて K-localization とも呼ばれる．

4.4 最尤法アンサンブルフィルタへのモデル空間局所化の導入

MLEF にモデル空間局所化を導入する場合，局所化した予報誤差共分散 $\mathbf{P}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{loc}}$ から平方根行列を作り直し，$\mathbf{Z}$ に局所化の効果を反映させる必要がある．さらに局所化は実質的にアンサンブルメンバー数を増やすことになるため，解析後に次の予報サイクルに移るためには，局所化を入れて増やしたアンサンブルから元のメンバー数分のアンサンブルを選び出さなければならない．本研究では変調積（modulation product）を利用して，局所化の効果を反映したアンサンブル摂動行列を構築する (Bishop and Hodyss, 2009; Bishop et al., 2017; Liu et al., 2009).

行列の変調積は 2 つの行列の列ベクトル同士の要素積を並べた行列として定義される．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \vartriangle \mathbf{B} &= [\mathrm{diag}(\mathbf{a}_1)\mathbf{B}, \cdots, \mathrm{diag}(\mathbf{a}_L)\mathbf{B}] \\
&= [(\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_K), \cdots, (\mathbf{a}_L \circ \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_L \circ \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{a}_L \circ \mathbf{b}_K)]
\end{aligned} \tag{4.87}
$$

$$
\text{where} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times L}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times K}
$$

ただし $\mathrm{diag}(\mathbf{a})$ はベクトル $\mathbf{a}$ の要素を対角成分とする対角行列である．局所化行列と予報誤差共分散がそれぞれ以下のように平方根行列に分解できる

$$
\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{P}^{\mathrm{e}} = \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}(\mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2})^{\mathrm{T}} \tag{4.88}
$$

とき，2 つの行列の要素積で作成される行列の平方根行列は，それぞれの平方根行列を用いて計算される変調積で表すことができる．

$$
\mathbf{P}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{loc}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{P}^{\mathrm{e}} = \mathbf{P}^{1/2}_{\mathrm{f,mod}} \mathbf{P}^{\mathrm{T}/2}_{\mathrm{f,mod}} \tag{4.89}
$$

$$
\mathbf{P}^{1/2}_{\mathrm{f,mod}} = \mathbf{W} \vartriangle \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2} \in \mathbb{R}^{N \times M}, \quad M = N_{\mathrm{e}} \times L \tag{4.90}
$$

ただし $\mathbf{P}^{\mathrm{T}/2}_{\mathrm{f,mod}} = (\mathbf{P}^{1/2}_{\mathrm{f,mod}})^{\mathrm{T}}$ であり，L は $\mathbf{W}$ の列数である．$\mathbf{F}$ の平方根行列 $\mathbf{W}$ の作成には固有値分解が利用されることが多く，その場合は用いる固有値と固有ベクトルの組数が L となる．L は固有値の累積寄与率が設定された閾値（通常 0.85〜0.9 程度）を超える数として決められ，$O(10^1 \sim 10^2)$ 程度である．この方法の場合，アンサンブル数は $M = N_{\mathrm{e}} \times L$ に増える．

解析値は，再構築したアンサンブル摂動を元のアンサンブル摂動と置き換えて求める．アンサンブル数を元に戻す前の解析アンサンブル摂動 $\mathbf{P}^{1/2}_{\mathrm{a,mod}}$ は

$$
\mathbf{P}^{1/2}_{\mathrm{a,mod}} = \mathbf{P}^{1/2}_{\mathrm{f,mod}} [\mathbf{I}_M + \mathbf{Z}(\mathbf{x}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}} \mathbf{Z}(\mathbf{x}^{\mathrm{a}})]^{-1/2} \tag{4.91}
$$

$$
\mathbf{Z}(\mathbf{x}^{\mathrm{a}}) = \mathbf{R}^{-1/2} [H(\mathbf{x}^{\mathrm{a}} + \mathbf{p}_i^{\mathrm{f,mod}}) - H(\mathbf{x}^{\mathrm{a}})]_{i=1,\cdots,M} \tag{4.92}
$$

として計算される．ただし $\mathbf{p}_i^{\mathrm{f,mod}}$ は局所化後の予報アンサンブル摂動の列ベクトルである．

次のサイクルに移るための解析アンサンブルのリサンプリングは，局所化で増やしたメンバー間の線形結合によって行う (Zupanski, 2021).

$$
\mathbf{x}_i^{\mathrm{a}} = \mathbf{x}^{\mathrm{a}} + \mathbf{P}^{1/2}_{\mathrm{a,mod}} \boldsymbol{\theta}_i \quad (i = 1, \cdots, N_{\mathrm{e}}) \tag{4.93}
$$

$\boldsymbol{\theta}_i$ は正規分布に従う M 次の乱数ベクトルである．

4.5 最尤法アンサンブルフィルタへの観測空間局所化の導入

最尤法アンサンブルフィルタへの観測空間局所化の適用では，局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (LETKF，Hunt et al., 2007; Miyoshi and Yamane, 2007) を参考にする．

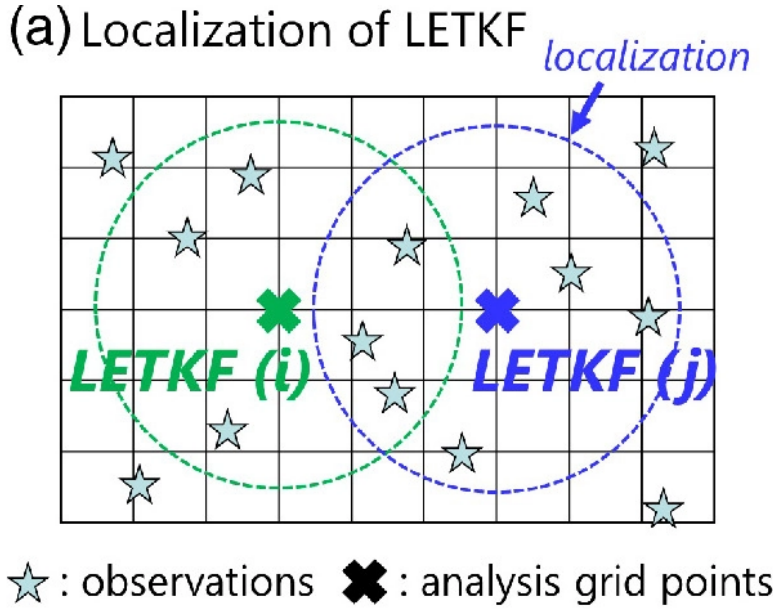

図 4.9: LETKF における解析格子点と使用観測の概念図．Kotsuki et al. (2020) Figure 2(a) より引用

4.5.1　局所アンサンブルカルマンフィルタ

LETKF は名前の通り ETKF を元にしており，格子点ごとにその近傍の観測のみを使うように改良された同化手法である．MLEF は ETKF と類似性を持つため，LETKF と同様に格子点ごとの解析を行う観測空間局所化手法を導入することができる．LETKF の解析の流れを以下に示す．

1. 解析領域全体でアンサンブル平均 $\overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}}$，アンサンブル摂動行列 $\mathbf{X}^{\mathrm{f}}$，観測空間のアンサンブル摂動行列 $\mathbf{Z}$，及びイノベーション $\mathbf{d}$ を計算する．
2. 以下各格子点 i に対して，
   (a) 格子点から距離 r_{loc} の範囲内にある観測を選択し（図 4.9），局所的なイノベーション $\mathbf{d}_{\mathrm{loc}}$ と対応する局所的な観測誤差共分散 $\mathbf{R}_{\mathrm{loc}}$，観測摂動行列 $\mathbf{Z}_{\mathrm{loc}}$ を構築する．この時，観測誤差分散の大きさを観測と格子点の距離に応じて膨張させる（遠隔の観測の重みを減らす）．

$$[\mathbf{R}_{\mathrm{loc}}]_{jj} \to [\mathbf{R}_{\mathrm{loc}}]_{jj}/F_{ij} \tag{4.94}$$

$$[\mathbf{Z}_{\mathrm{loc}}]_{jk} \to [\mathbf{Z}_{\mathrm{loc}}]_{jk}/\sqrt{F_{ij}} \tag{4.95}$$

   ここで F_{ij} は観測 j と格子点 i 間の距離に対して式 (4.83) または (4.84) を用いて計算した値を表す．F_{ij} の計算に用いる局所化半径は r_{loc} と整合するように決められる．

   (b) 式 (4.28)～(4.31) に従い，格子点 i における解析値 $\overline{x_i^{\mathrm{a}}}, [\mathbf{X}^{\mathrm{a}}]_i, x_i^{\mathrm{a}(k)}$ を求める．

手順 2a 及び 2b は各格子点ごとに独立に行えるため LETKF は並列環境に適しており，研究コミュニティで広く使われている．LETKF は各解析格子点におけるアンサンブル結合係数が独立である（空間方向に相関を持たない）と仮定し，局所的な解析領域において 2 次形式のコスト関数を定義してその最小値を解析的に求めていることに相当する．

LETKF では解析領域全体の解析値を個々の格子に対する解析結果から作成するため，解析値全体として大気場が元々保持していたバランスを乱しているとも考えられる．しかし LETKF の解析アンサンブルの更新式は，解析アンサンブルがアンサンブル平均に対してバイアスを持たないことと，予報アンサンブルからの変化が最小になることを条件として数学的に求められているため，解析値のバランスに対する影響も最小に留まっている．例えば Greybush et al. (2011) では，解析値のバランスをモデル空間局所化を用いた EnKF と LETKF で比較し，同じ局所化半径を用いた場合は LETKF のほうが非バランス成分の少ない解析値を作成することを示した．

4.5.2 局所最尤法アンサンブルフィルタ

本研究では LETKF と同様の観測空間局所化を導入した MLEF，LMLEF（Local Maximum Likelihood Ensemble Filter）を導出する．観測の非線形性を正確に評価するために最適化による反復解法を用いる場合，各格子点の解析に他の格子点の影響が入りうるため，LETKF のように解析を完全に独立に行うことはできない．

4.5.2.1 局所的な勾配を用いる手法

LETKF よりも非線形性を正確に評価できる定式化として，本研究では Yokota et al. (2016) を参考に全格子点で同時に最適化を進めていく解析手法を実装した．この手法は次に述べる考案手法との区別をつけるために末尾に Y をつけた LMLEFY という呼称を用いる．以下に LMLEFY の解析手順を示す．

1. $w_{ij}^{(0)} = 0$，$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{\mathrm{f}}$，$k = 0$ と初期化する（w の上付き添字は反復回数，下付き添字 i は格子点番号，j はアンサンブルメンバーのインデックスを表す）．
2. $k < K_{\max}$（$K_{\max}$ は最適化の最大反復数）の間，
   (a) 解析領域全体でイノベーション $\mathbf{d} = \mathbf{y} - H(\mathbf{x}^{(k)})$，観測摂動行列 $\mathbf{Z}(\mathbf{x}^{(k)})$ を計算する．
   (b) 各格子点 i において
      i. LETKF と同様に，格子点近傍の観測のみを用いた局所的なイノベーション，観測誤差共分散，観測摂動行列を構築して距離による修正を行う．
      ii. コスト関数勾配の ij 成分を計算する．

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{(k)}} = w_{ij}^{(k)} - \mathbf{z}_j(\mathbf{x}^{(k)})^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_{\mathrm{loc}}^{1/2} \mathbf{d}_{\mathrm{loc}} \tag{4.96}$$

ただし $\mathbf{z}_j(\mathbf{x}^{(k)})$ は $\mathbf{Z}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{x}^{(k)})$ の j 列目のベクトルを表す．

(c) $\|\partial J/\partial \mathbf{w}\| < \varepsilon$（$\varepsilon$ は収束判定の閾値）を満たす場合，反復を終了する．

(d) 全格子で計算された勾配を元に降下方向 $\mathbf{p}^{(k)}$ を計算し，線形探索を行ってステップ幅 $\alpha^{(k)}$ を決定する．

(e) 制御変数 $\mathbf{w}$ と状態変数を更新する．

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{p}^{(k)} \tag{4.97}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{\mathrm{f}} + \mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}\mathbf{w}^{(k+1)} \tag{4.98}$$

3. (4.76) から対応する解析アンサンブル摂動行列の行ベクトル $[\mathbf{P}_{\mathrm{a}}^{1/2}]_i$ を求める．

LMLEFY は LETKF のように局所的なコスト関数を定義しているのではなく，解析領域全体で定義されたコスト関数の勾配を局所的に求めている．そのため最適化の変数更新を全体で一斉に行う必要があり，LETKF と比較して並列化できる部分（2b）が少ない．一方で観測演算子を線形近似しないコスト関数 (4.66) を扱うことができるため，非線形観測同化の性能が高くなることが期待される．

4.5.2.2 局所的なコスト関数を用いる手法

LMLEFY では一回の反復ごとに他の格子点で計算された結合係数の情報を取り入れているが，格子点近傍の観測に相当する状態量（$H(\mathbf{x})$）を評価するために必要となる状態変数も解析格子点の近傍に限られる．結合係数の値が隣り合う格子同士で大きく変化しないこと（第 1 章図 1.8）を考慮すると，最適化の反復中の観測相当量の再評価を，現在解析している格子点の結合係数のみで近似的に行う実装が有効であると考えられる．この実装は結合係数の滑らかな分布に基づいて結合係数を一定とみなす仮定の下に構築されることから，本研究では末尾に CW（Constant Weight）をつけた呼称を用いる．以下に LMLEFCW の解析手順を示す．

1. 解析領域全体でイノベーション $\mathbf{d}$，観測摂動行列 $\mathbf{Z}(\mathbf{x}^{\mathrm{f}})$ を計算する．
2. 以下各格子点 i に対して，

(a) 格子点近傍の観測のみを用いた局所的なイノベーション，観測誤差共分散，観測摂動行列を構築し，観測誤差共分散と観測摂動行列を式 (4.94)，(4.95) に基づいて修正する．

(b) $\mathbf{w}_i^{(0)} = \mathbf{0}$，$k = 0$ と初期化する．

(c) $k < K_{\max}$（$K_{\max}$ は最適化の最大反復数）の間，

i. 局所的なコスト関数の勾配 (4.67) または (4.75) を計算する．

ii. $\|\nabla J\| < \varepsilon$（$\varepsilon$ は収束判定の閾値）を満たす場合，反復を終了する．

iii. 計算された勾配を元に降下方向 $\mathbf{p}^{(k)}$ を計算し，線形探索を行ってステップ幅 $\alpha^{(k)}$ を決定する．

iv. 制御変数 $\mathbf{w}_i$ と局所的な観測に対応する状態変数を更新する．

$$\mathbf{w}_i^{(k+1)} = \mathbf{w}_i^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{p}^{(k)} \tag{4.99}$$

$$\{\mathbf{x}\}_i^{(k+1)} = \{\mathbf{x}\}_i^{\mathrm{f}} + \{\mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}\}_i\mathbf{w}_i^{(k+1)} \tag{4.100}$$

ここで $\{\mathbf{x}\}_i, \{\mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}\}_i$ はそれぞれ，現在解析を行う点の観測に対応する位置のベクトルと行列を表す．

v. 局所的なイノベーション，観測誤差共分散，観測摂動行列を再構築する．

（d）収束した制御変数 $\mathbf{w}^{\mathrm{a}}$ を用いて，解析値を計算する．

$$x_i^{\mathrm{a}} = x_i^{\mathrm{f}} + [\mathbf{P}_{\mathrm{f}}^{1/2}]_i\mathbf{w}^{\mathrm{a}} \tag{4.101}$$

（e）(4.76) から対応する解析アンサンブル摂動行列の行ベクトル $[\mathbf{P}_{\mathrm{a}}^{1/2}]_i$ を求める．

LMLEFCW は LETKF と同様に局所的にコスト関数を定義しているが，観測の非線形性に伴う高次の観測項を線形近似せずに扱う．LMLEFCW では手順 2 を全て並列に行うことができるため，LMLEFY よりも効率の良い実装となっている．

LMLEFY と LMLEFCW の違いを空間一次元の概念図で示す（図 4.10）．横軸に格子点を取り，黒線でコントロールランの第一推定値，水色の星印で観測を表す．各格子点における解析領域を点線で囲まれた領域として，その領域内の観測を用いて最適化の反復を行い，結合係数とそれに対応するインクリメントを計算する（赤青緑の矢印）．LMLEFY（図 4.10 (i)）では次の反復におけるコントロールランの推定値 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ を各格子点の更新を反映して作成する（橙色の破線）．LMLEFCW（図 4.10 (ii)）では各領域で計算した結合係数をもとに，各領域でコントロールランの推定値 $\{\mathbf{x}^{(k+1)}\}_{i-1,i,i+1}$ を作成（各色の破線）して次の反復に移るため，領域ごとに独立に反復を行うことができる．図 4.10 (ii) ではわかりやすくするために各解析領域での推定値の差を大きく示しているが，結合係数が近い値をとる場合，領域間での差はほとんど無視できる．

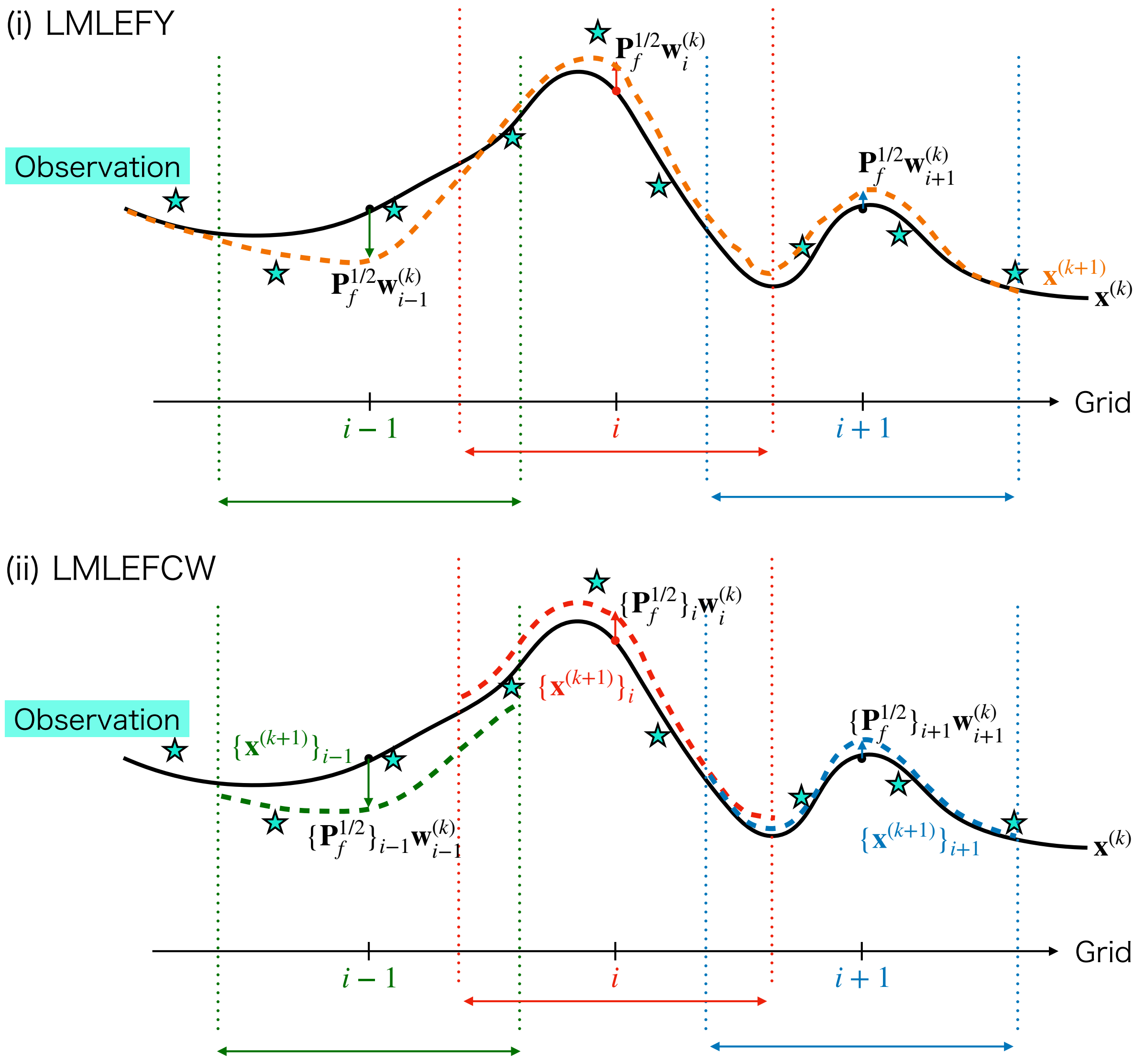

図 4.10: LMLEF における解析値更新の概念図．(i) LMLEFY，(ii) LMLEFCW

第 5 章

非線形観測に対する解析精度の検証

本章では衛星観測の特徴の一つである非線形観測に対する解析精度に焦点を当てて，アンサンブルカルマンフィルタと最尤法アンサンブルフィルタの比較を行う．また最尤法アンサンブルフィルタの解析精度に観測演算子の接線形近似が与える影響を検証する．

5.1　実験設定

本章における理想化実験の設定は Zupanski et al. (2008) を参考にした．

5.1.1　使用モデル

本研究では 1 次元移流拡散方程式 (Burgers, 1948)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

を用いる．これは数値予報モデルの基本形となっている．空間方向の刻み幅は 0.05 で格子点数は 81 であり，空間方向の差分化には中央差分スキームを用いる．時間刻み幅は 0.0125 で，時間積分には Lax–Wendroff スキームを用いる．拡散係数 ν は 0.05 である

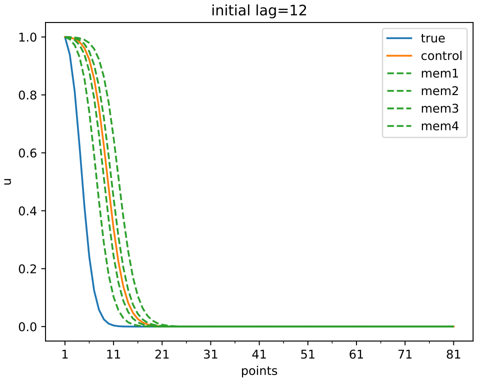

図 5.1: 真値（青）と実験（橙：コントロールラン，緑破線：アンサンブル）の初期値．

（値は全て無次元量）．境界条件は領域左端で $u = 1$，右端で $u = 0$ であり，この境界条件に対応する解は左から右へ伝播する衝撃波を表す．

真値と実験で異なる初期値（図 5.1）を与える双子実験を行う．実験のコントロールランの初期値は真値に対して 40 ステップ先に進んでおり，アンサンブルメンバーはコントロールの周りに等間隔で分布させる．モデル誤差は考慮せず，真値の作成と実験には同じモデルを用いる．

5.1.2　観測

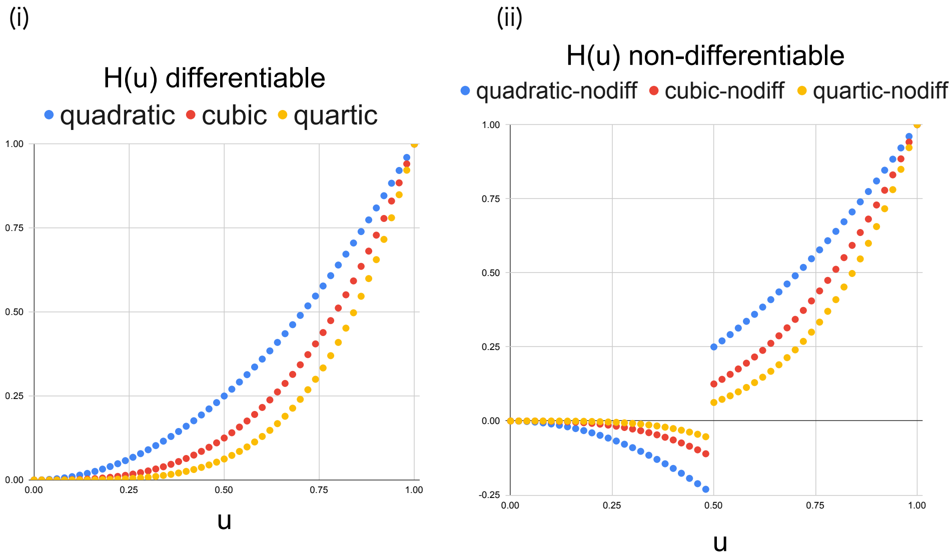

図 5.2: 予報変数（横軸）と観測要素（縦軸）の関係．(i) 微分可能な演算子，(ii) 微分不可能な演算子の場合を示す．青が 2 次，赤が 3 次，黄が 4 次を表す．

観測演算子は，非線形性の強さと不連続点の有無を変えた以下の 6 種類の関数を用いて定義する．

$$H(u) = u^k \text{ (differentiable)}, \quad H(u) = \begin{cases} -u^k (u < 0.5) \\ \;\; u^k (u \geq 0.5) \end{cases} \text{(non-differentiable)} \quad (k = 2, 3, 4) \tag{5.2}$$

予報値と観測演算子を作用させた値の関係を図 5.2 に示す．観測は真値に上記の観測演算子を作用させた後，平均 0，標準偏差 σ_{o} のガウス分布に従う乱数を観測誤差として加えて作成する．σ_{o} は 9 種類（$\sigma_{\mathrm{o}} = 1 \times 10^{-l}, 2 \times 10^{-l}, 5 \times 10^{-l}$ $(l = 2, 3, 4)$）を用いて実験を行う．観測誤差間の相関は考慮せず，従って観測誤差共分散 $\mathbf{R}$ は観測誤差分散を対角成分に持つ対角行列とする．観測は 20 ステップごとに全ての格子点に与え，解析–予報サイクルは 20 回行う．

5.1.3 同化手法

本章の実験ではフィルタ手法として ETKF，変分法として MLEF を用いる．以下の 5 種類の実験を行う．

MLEF-FH　同化手法として MLEF を用いて，式 (4.71) で $\mathbf{Z}$ 行列を計算する．
MLEF-JH　同化手法として MLEF を用いて，式 (4.70) で $\mathbf{Z}$ 行列を計算する．
ETKF-FH av-op　同化手法として ETKF を用いて，式 (4.14) で $\mathbf{Z}$ 行列を計算する．
ETKF-FH op-av　同化手法として ETKF を用いて，式 (4.15) で $\mathbf{Z}$ 行列を計算する．
ETKF-JH　同化手法として ETKF を用いて，式 (4.13) で $\mathbf{Z}$ 行列を計算する．

アンサンブル数は自由度をそろえるために，MLEF で 4，ETKF で 5 とする．アンサンブル数をこれ以上大きくしても，解析精度に大きな変化はなかった．また本実験では共分散膨張と局所化はどちらも適用していない．MLEF の最適化手法は特に断らない限り非線形共役勾配法を用いる．

5.1.4 精度評価

各実験の精度評価は真値と解析値の間の RMSE

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{state}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{state}}} [u_{\mathrm{analysis}}(i) - u_{\mathrm{truth}}(i)]^2} \tag{5.3}$$

で測る．$N_{\mathrm{state}} = 81$ は格子点数である．RMSE が観測誤差標準偏差よりも小さな値をとると，観測で予報を置き換えるよりも良い精度の解析値が得られたことを示す．

観測誤差の大きさを変えた影響を考慮した総合的な評価指標として，RMSE と観測誤差の比を幾何平均したスコアを導入する．

$$\mathrm{score} = \left[\prod_{\sigma_\mathrm{o}} \left\{ \frac{1}{N_{\mathrm{test}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{test}}} \left(\frac{\sigma_\mathrm{o}}{e_{i,\sigma_\mathrm{o}}} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{N_{\sigma_\mathrm{o}}}} \tag{5.4}$$

e_{i,σ_o} は観測誤差 σ_o の観測を与えた i 番目の実験の RMSE（後半 15 サイクルの平均），N_{test} は試行回数（本研究では 50 回），N_{σ_o} は観測誤差の種類数（本研究では 9 種類）を表す．$\{\}$ 内は試行の算術平均を表す．スコアが 1 と等しいとき観測誤差と解析誤差が同水準であり，大きいほど総合的に良い精度であることを示す．

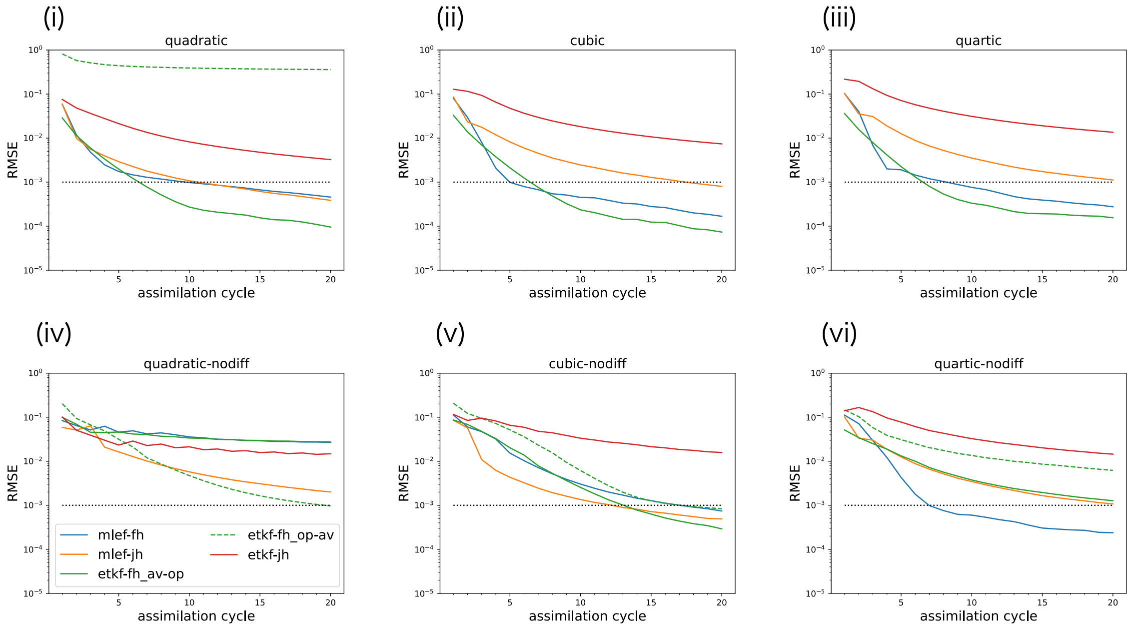

図 5.3: 観測誤差 1×10^{-3} の実験における RMSE の時系列．横軸は同化サイクル数を示し，縦軸は RMSE を対数スケールで示す．黒点線は観測誤差の水準を表す．凡例は図 (iv) に示し，すべての図で共通である．

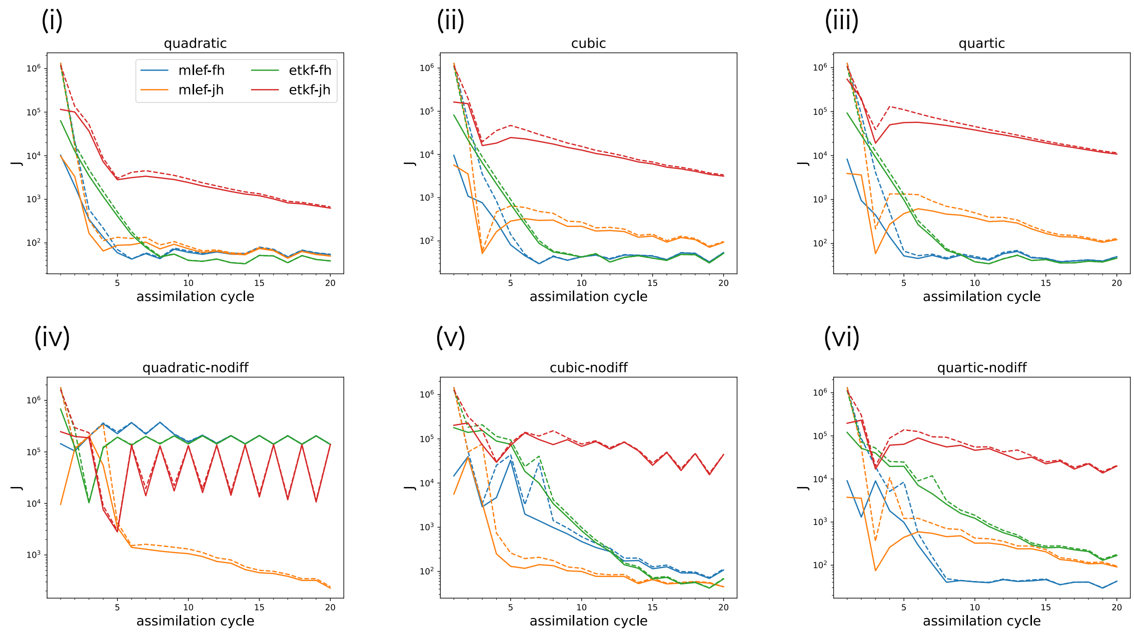

図 5.4: 観測誤差 1×10^{-3} の実験におけるコスト関数の変化．横軸は同化サイクル数，縦軸は対数スケールでコスト関数を示す．破線が初期コスト（第一推定値で評価），実線が最終コスト（解析値で評価）を表す．凡例は図 (i) に示し，すべての図で共通である．ETKF-FH は av-op のものを示している．

5.2 アンサンブル変換カルマンフィルタと最尤法アンサンブルフィルタとの比較

図 5.3 に観測誤差 1×10^{-3} の観測を与えた場合の解析誤差の推移を，図 5.4 にコストの推移を示す．なお ETKF における初期コストと最終コストは，MLEF が評価するコスト関数 (4.66) の第一推定値 $\mathbf{x}^{\mathrm{f}}$ を第一推定値のアンサンブル平均 $\overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}}$ で置き換え，アンサンブル結合係数 $\mathbf{w}$ を以下の式で計算して求めている．

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ (initial)} \tag{5.5}$$

$$= \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{a}}} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}} \text{ (final)} \tag{5.6}$$

接線形近似を避けた実験（FH）で比べると，微分可能な観測では MLEF と ETKF の av-op 間で解析精度に差が見られるが，最終コストの大きさはほとんど同じオーダーであり，共に観測誤差水準を下回っていることからその同化性能に大きな差はないと考えられる．微分可能な演算子（上段）と微分不可能な演算子（下段）を比較すると，微分不可能な場合のほうが精度が悪化しており，特に 2 次の観測で顕著である．これは図 5.2 に示す通り，2 次の微分不可能な演算子が最も不連続性が大きく，難しい問題設定となっているためであると考えられる．微分不可能な 4 次の観測では解析精度とコストの両方で MLEF が ETKF を上回っている．一方で ETKF-FH op-av は微分不可能な場合の精度は av-op と同等または優れているが，微分可能な場合には精度が著しく悪く，3 次以上では発散している．この理由については後の節で詳しく解析する．接線形近似を用いた実験（JH）では，すべての演算子に対して MLEF のほうが ETKF よりも精度が良く，これは MLEF で用いるコスト関数の最適化が非線形観測同化に有効であることを示唆している．

観測誤差の大きさの影響を考慮したスコアの結果を図 5.5 に示す．図 5.3 と同様に，非線形性が強くなるほど MLEF-FH の精度が良くなっていることと，MLEF-JH がどの観測演算子においても ETKF-JH よりも優れていることがわかる．微分可能な演算子における ETKF-FH op-av は上述したように発散しているため，図には表れていない．ETKF-FH op-av は観測誤差が小さくなると計算が不安定になり，その観測誤差の閾値は非線型性が強くなるほど大きくなる（図は省略）．微分不可能な場合，すべての実験でスコアが 1 を下回っており，同化がうまくいっていないことがわかる．不連続性が最も強い 2 次の演算子を除いて微分可能な場合と不可能な場合の結果を比較すると，JH のほうがスコアの変化が小さく不連続性に対してロバストである．これは，今回の観測演算子を接線形近似したとき，微分可能な場合と不可能な場合で変わるのは符号のみであり，この符号の変化は 2 次関数形を仮定するコスト関数では打ち消されるためと考えられる．

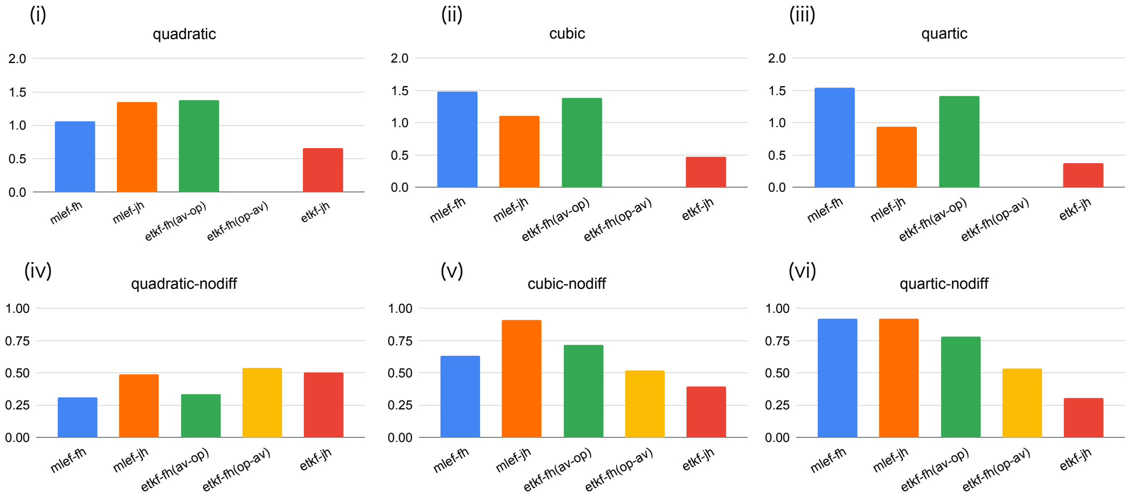

図 5.5: 各観測演算子におけるスコア．スコアが 1 と等しいとき解析と観測の精度が同水準であり，大きいほど高精度であることを示す．(i)–(iii) は微分可能な演算子，(iv)–(vi) は微分不可能な演算子に対する結果を示し，縦軸の範囲が異なっている．

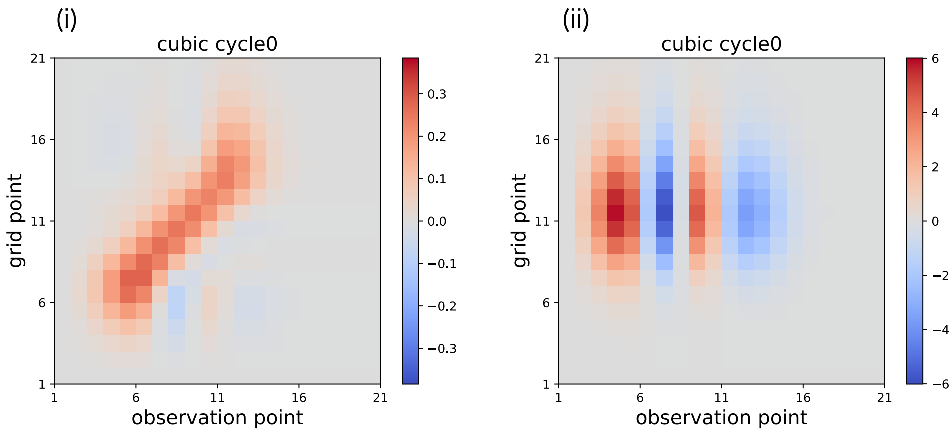

図 5.6: (i) ETKF-FH av-op と (ii) ETKF-FH op-av におけるカルマンゲインの構造．1–20 番目の格子点と観測点にあたる領域を切り出している．

5.2.1 アンサンブル変換カルマンフィルタの発散の原因

ここで，ETKF-FH op-av が発散した理由について考察する．観測誤差 1×10^{-3} の 3 乗観測を与えた実験で，ETKF-FH av-op と op-av の最初のサイクルにおけるカルマンゲインの構造を図 5.6 に示す．この実験設定で ETKF-FH op-av は発散する．av-op では対角成分にシグナルが集中しており，格子点と同じ位置の観測の影響が最も大きくなっているのに対して，op-av では 11 番目の格子点付近に 4 から 12 番目の観測の影響が現れており，その大きさも av-op の 20 倍になっている．この 11 番目の格子点付近は最初のサイクルで最もアンサンブルメンバー間の差（スプレッド）が大きい位置である．ここから，op-av では一つの格子点に対して広い範囲の観測が大きな影響を与えるような重みが

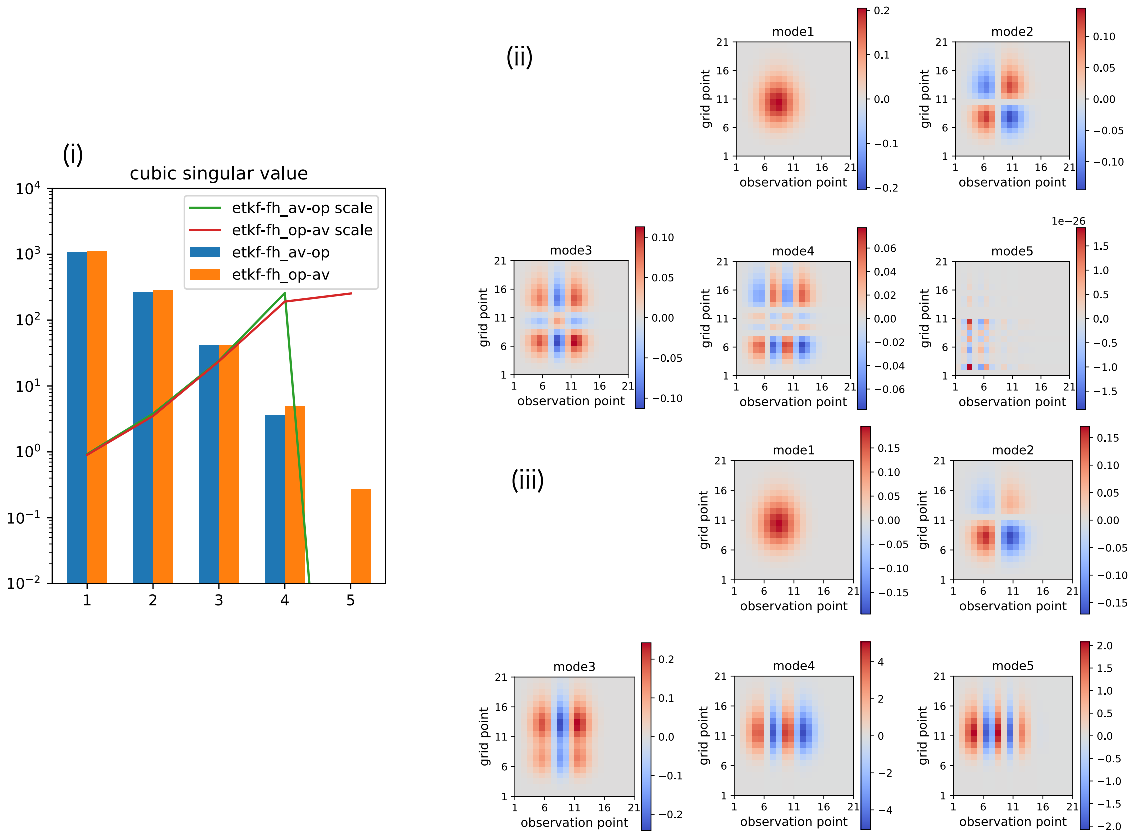

図 5.7: (i) 観測摂動行列 $\mathbf{Z}$ の特異値（棒グラフ）と式 (5.8) で定義したスケール（折れ線グラフ）. ETKF-FH av-op の第 5 モードの特異値およびスケールは 0 である．(ii,iii) モードごとに展開したカルマンゲイン．(ii) が ETKF-FH av-op，(iii) が ETKF-FH op-av を示す．図 5.6 と同様の領域を切り出している．

作られ，発散の原因となったことがわかる．

このようなカルマンゲインを創り出した原因について，カルマンゲインを特異値分解を利用してモード展開することによって分析する．カルマンゲインの構成式 (4.27) において，$\mathbf{Z}$ 行列を特異値分解

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= \mathbf{U\Sigma V}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{\Sigma} &= \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{N_\mathrm{e}}) \\ \mathbf{U} &= (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N_\mathrm{e}}), \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^p \\ \mathbf{V} &= (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{N_\mathrm{e}}), \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{N_\mathrm{e}}\end{aligned} \tag{5.7}$$

し，(4.27) に代入し，$\mathbf{R} = \sigma_\mathrm{o}^2 \mathbf{I}_p$ であることを利用すると，

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{X}^\mathrm{f}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{V\Sigma}^2\mathbf{V}^\mathrm{T})^{-1}\mathbf{V\Sigma U}^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1/2} \\ &= \mathbf{X}^\mathrm{f}\mathbf{V}(\mathbf{I}_{N_\mathrm{e}} + \mathbf{\Sigma}^2)^{-1}\mathbf{\Sigma U}^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1/2} \\ &= \sum_{i=1}^{N_\mathrm{e}} \boxed{\frac{\sigma_i}{(1+{\sigma_i}^2)\sigma_\mathrm{o}}}\ \underline{\mathbf{X}^\mathrm{f}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{5.8}$$

となり，特異値 σ と観測誤差 σ_{o} によって決まるスケール（囲み部分）を重みとするモード（下線部分）の重ね合わせによって決まる．

Z 行列の特異値とスケール，カルマンゲインをモード展開した結果を図 5.7 に示す．アンサンブル摂動行列 $\mathbf{X}^{\mathrm{f}}$ は列方向の平均が 0 のため，行列のランクは高々 $N_{\mathrm{e}} - 1$ である．そのため，$\mathbf{X}^{\mathrm{f}}$ を元に構成される **Z** のランクも高々 $N_{\mathrm{e}} - 1$ であることが期待される．ETKF-FH av-op (4.14) ではランク落ちの性質が保持されるため，特異値は 4 つしか存在しない．一方 ETKF-FH op-av (4.15) では平均操作の後に非線型の観測演算子を作用させるため列方向の平均が 0 とならず，従って 5 つ目の特異値が存在している．しかしこの 5 つ目の特異値は本来存在しなかったものであるため，他の 4 つの特異値に比べて大きさが小さい．式 (5.8) から，モード展開したときのスケールは特異値の大きさに反比例するため，この 5 つ目の特異値に対応するモードの寄与は相対的に大きくなる．そのため，5 番目の偽の特異値に対応する異常に大きい構造が物理的に不安定な解を作り出す原因であると考えられる．**Z** 行列のランクの保存は解析アンサンブル摂動行列 (4.30) のランクにも影響を与える．解析アンサンブルのランクが保たれる（列方向の平均が 0 となる）ことは，アンサンブル平均と整合する解析アンサンブルを作成する上で重要である (Hunt et al., 2007)．以上より，非線型の観測演算子にアンサンブルカルマンフィルタを適用する際は，線形の場合に満たすべき性質を保持するように拡張を行う必要がある．なお，微分不可能な場合は不連続性のために，観測演算子と平均をとる操作の順番によらず観測空間のアンサンブル摂動のランクは保持されない．しかし 5 番目の特異値の大きさが他の 4 つの特異値と同程度であるために，偽のモードの寄与が微分可能な場合ほど大きくならず発散しなかったと考えられる．

5.3 接線形近似の影響

この節では MLEF に焦点を戻し，接線形近似の有無による違いについて考察する．

図 5.3 に示されるように，微分可能な演算子で非線形性が強い場合，JH の精度は FH に劣る．JH では接線形近似を用いることで高次項の影響を避けて最適化の収束性を高めているが，図 5.4 の最終コストで FH と JH 間に差があることから推測されるように，収束した解が元の非線形コスト関数の最小値を与える解と一致するとは限らない．このため非線形性が強くなるほど非線形関数の最小値と JH が求めた最小値間の差が大きくなり，解析精度に差が出てきていると考えられる．一方で微分不可能な場合は，FH の優位性が現れない．これもやはりコスト関数の最適化の収束性に関わる問題であることが考えられる．例として，微分不可能な 2 次の観測を同化した実験の最初のサイクルにおける，最小値探索中のコスト関数と勾配ノルムの変化をそれぞれ図 5.8 (i),(iii) に示す．勾配ノルムは最小値探索の収束判定に用いられるが，青線で示す MLEF-FH の変化が途中で消えている．これは最小値探索が収束したためではなく探索が失敗していることを示してい

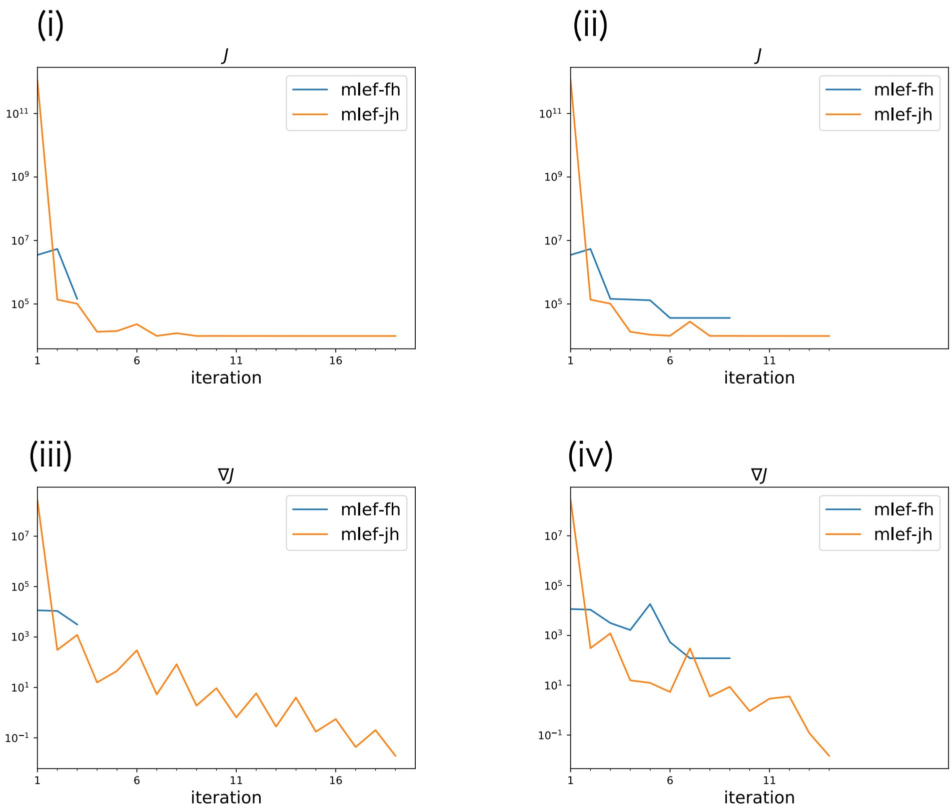

図 5.8: (i,iii) 微分不可能な 2 次の観測を与えた実験の最初のサイクルにおけるコスト関数の変化および勾配ノルムの変化．横軸は最適化の反復回数を表す．(ii,iv) 誤ったリスタート法を導入した場合のコスト関数および勾配ノルムの変化．

る（勾配ノルムは 10^3 程度までしか下がっていない）．MLEF-FH はより正確に観測項を評価できる一方で，観測項に 2 次以上の高次の項を含むためコスト関数の形状が 2 次関数からはかけ離れたものとなる．本研究で用いた非線形共役勾配法を含む一般に用いられる最適化手法は，最小値を求める目的関数が 2 次関数に近いことを仮定しているため，MLEF-FH の最小値探索は収束しづらくなる．従って，MLEF-FH の解析精度は観測評価の正確性とコスト関数の最適化の収束性とのバランスによって決まると考えられる．

5.3.1　誤った収束性の改善法

第 4.2.3 節で述べたように，MLEF では最適化の収束性を高めるためにヘシアンを利用した前処理を行う．本来のアルゴリズムでは，前処理行列 (4.72) は最適化を始める前に計算し，最適化の反復中は固定する．線形の観測演算子の場合は，一回の前処理でコスト関数の形状を最適値を中心とする N_e 次元球に修正することができるため，最適化は 1 回の反復で終わる．しかし非線型の場合，前処理は初期値の近傍においてコスト関数の形状を N_e 次元球に近づけることに留まり，予報値と解析値（最適値）が大きく離れている同化初期には，一回の前処理だけでは十分に収束性を高めることができない．そこで本研究

では当初，最適化の数回の反復ごとに第一推定値をその時点での解析値で更新し，前処理行列を再評価する「リスタート」法の導入を試みた．前処理行列の再評価は最適化が失敗するか，反復が制御変数の次元 N_e（$=4$）を超えた段階で行う．今回の実験ではリスタートは最大で 20 回までとし，リスタートを導入しても解に変化がなくなった時点で収束判定の結果によらず反復を終了するように設定した．リスタート法を導入した場合のコスト関数と勾配ノルムの変化を図 5.8 (ii),(iv) に示す．MLEF-FH はまだ完全には収束していないが，導入前と比較してコストと勾配ノルムがともに小さくなり，より最適値に近づいているように見える．また MLEF-JH でも収束が早くなっていることがわかる．

しかしこのリスタート法は観測への過剰適合につながる (Rodgers, 2000)．コスト関数 (4.64) を最小化する解析値をニュートン法を用いて反復的に解く場合，更新式は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + [(\mathbf{P}^\mathrm{f})^{-1} + \mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_i]^{-1}\{\mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_i)] - (\mathbf{P}^\mathrm{f})^{-1}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}^\mathrm{f})\} \\ &= \mathbf{x}^\mathrm{f} + [(\mathbf{P}^\mathrm{f})^{-1} + \mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_i]^{-1}\mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\{\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_i) + \mathbf{H}_i^\mathrm{T}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}^\mathrm{f})\} \qquad (5.9)\end{aligned}$$

ただし $\mathbf{H}_i$ は $\mathbf{x}_i$ の周りで線形化した観測演算子である．ここで反復途中に第一推定値 $\mathbf{x}^\mathrm{f}$ を最新の推定値 $\mathbf{x}_i$ に置き換えてしまうと，

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + [(\mathbf{P}^\mathrm{f})^{-1} + \mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_i]^{-1}\mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\{\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_i) + \mathbf{H}_i^\mathrm{T}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i)\} \\ &= \mathbf{x}_i + [(\mathbf{P}^\mathrm{f})^{-1} + \mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_i]^{-1}\mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\{\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_i)\} \qquad (5.10)\end{aligned}$$

となり，収束するとき（$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}}$）には

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} + [(\mathbf{P}^\mathrm{f})^{-1} + \mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_i]^{-1}\mathbf{H}_i^\mathrm{T}\mathbf{R}^{-1}\{\mathbf{y} - H(\hat{\mathbf{x}})\} \qquad (5.11)$$

となる．式 (5.11) では $\hat{\mathbf{x}}$ として明らかに $\mathbf{y} = H(\hat{\mathbf{x}})$ を満たすものを求めており，背景誤差の影響が含まれなくなる．このため観測に過剰に近づく解が生成されることになる．本研究で行った理想化実験では，真値にノイズを加えて観測を作成したため精度が向上した．しかし現実大気モデルの同化で観測に近づきすぎると，モデルによる予報値が持っていた平衡状態が大きく乱される可能性があり，その後の予報に悪影響を与えることが考えられる．以上の理由から，今回検討したリスタート法は誤った対応策であることがわかる．

5.3.2　最適化手法間での比較

最適化手法の選択による解析精度への影響を評価するために，以下に挙げる 3 種類の最適化手法を用いて MLEF の同化性能の変化を調べた（図 5.9，5.10，5.11）．

制御変数 ζ　非線型共役勾配法（cg）
　　　　　　メモリ制限付き BFGS 法（lb）
制御変数 w　Newton 法（newton）

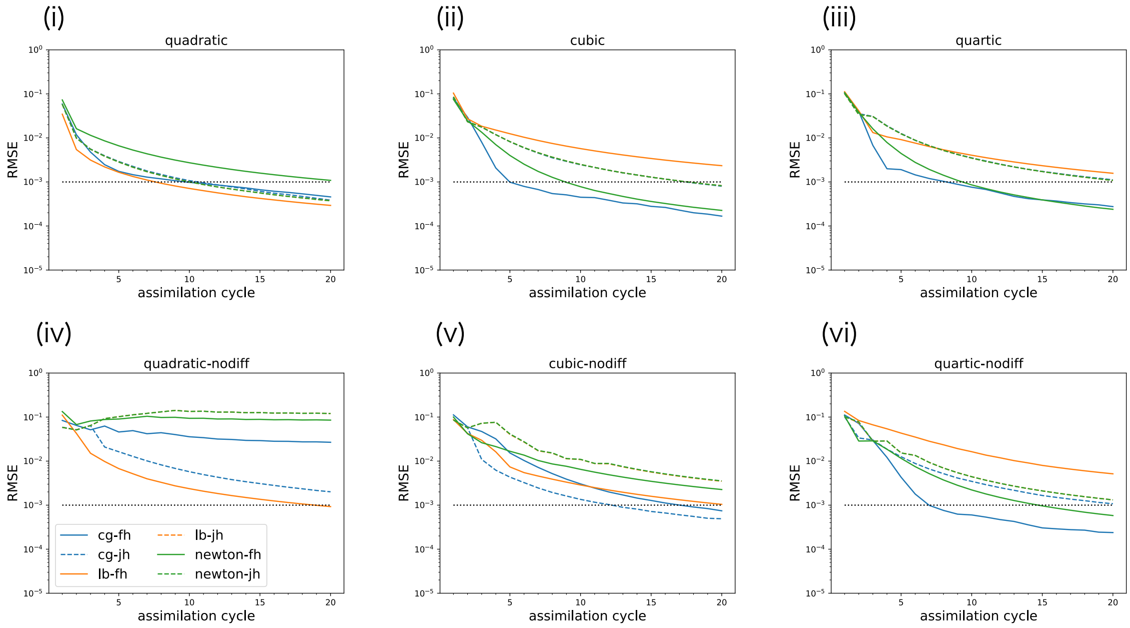

図 5.9: 図 5.3 と同様，ただし MLEF において最適化手法を変えた場合の結果を示す．

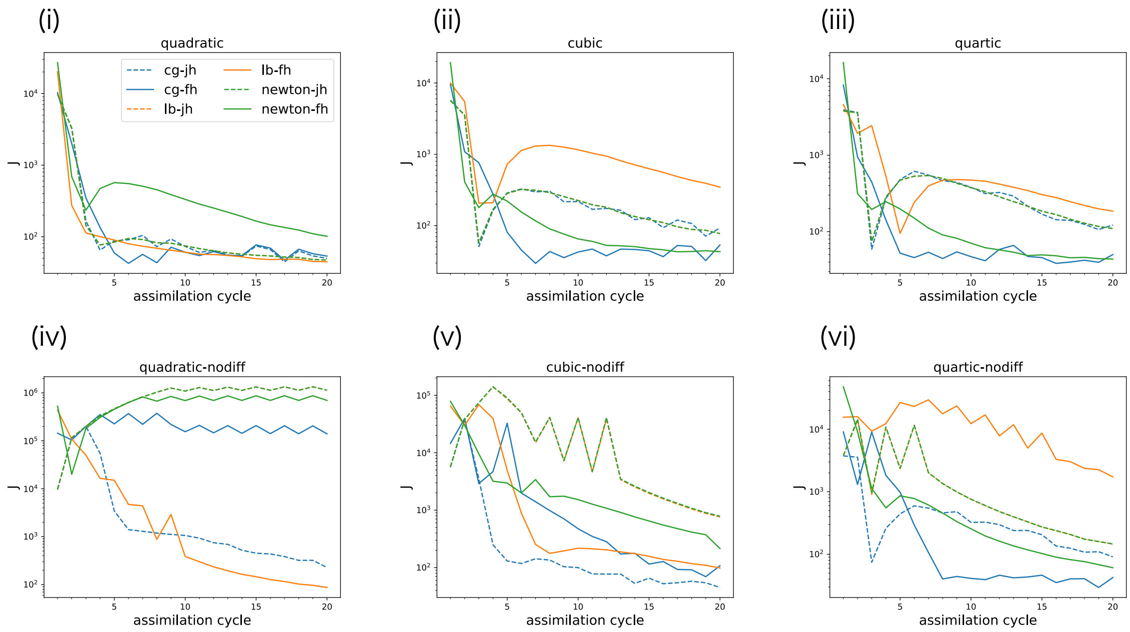

図 5.10: 図 5.4 と同様，ただし MLEF において最適化手法を変えた場合の最終コストのみ示す．

微分可能な演算子に対して接線形近似を用いる場合，最適化手法に依らず同じ解に収束するため解析誤差も一致する．一方微分不可能な演算子に対しては，ニュートン法とメモリ制限付き BFGS 法が一致するのに対して共役勾配法はより高い精度を示している．これは降下方向の定め方だけでなく降下方向へどれだけ動くかを決めるステップ幅の定め方（線形探索法）の違いによって生じていると考えられる．線形探索法は経験的なパラメタ調整が必要となるため，今回の実験設定に対しては共役勾配法で用いられている設定が合っていたと考えられるが，問題依存である．一方で接線形近似を避ける場合は，収束が

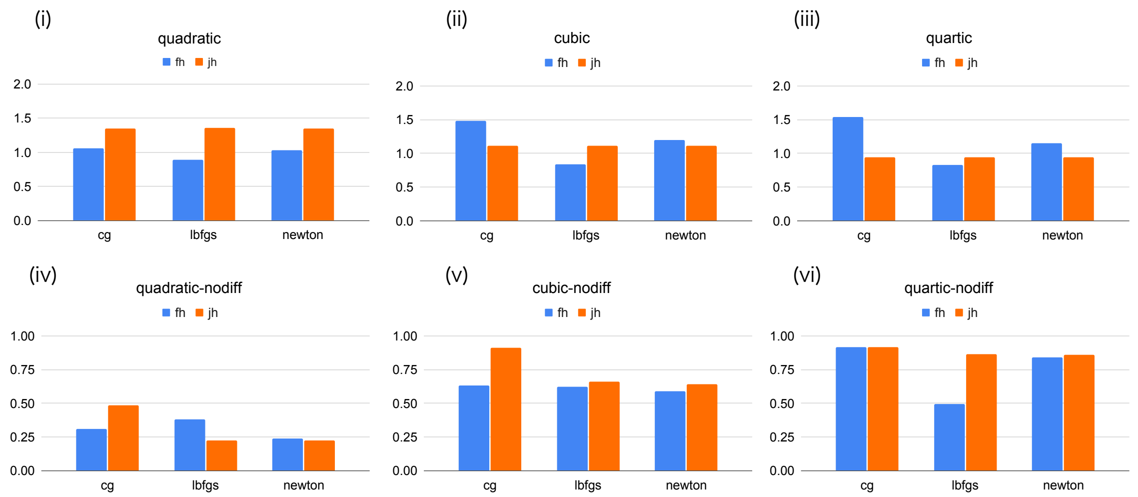

図 5.11: 図 5.5 と同様，ただし MLEF において最適化手法を変えた場合の結果を示す．

保証されないため手法によって解析精度が大きくばらつく．これも適切な最適化手法の決定は問題依存であるが，本実験においては 3 手法の中で共役勾配法が最も高い精度を示しており（図 5.11），またニュートン法はコストが滑らかに減少していくことがわかる（図 5.10）．メモリ制限付き BFGS 法は接線形近似を避けた場合，最も難しいと思われる微分不可能な 2 次の観測に対して比較的良い性能を示している（図 5.9(iv)，図 5.11(iv)）．これは先行研究 (Zhang et al., 2000) でも指摘されていたが，それ以外の観測に対する同化性能は他の 2 手法に劣っていた．

5.4　まとめ

本章では，MLEF の非線型観測同化に対する性能を，1 次元の移流拡散方程式を予報モデルとする同化実験で ETKF と比較することにより調査した．

MLEF は変分法を基礎とし，コスト関数をアンサンブル空間で最適化することによって解析値を求める．ETKF との比較から，このコスト関数の最適化が非線型観測演算子に対して有効であることがわかった．また，アンサンブル摂動を利用して観測演算子の接線形近似を避けた同化手法を用いると，特に非線型性が強い場合により良い解析精度を示した．MLEF は微分不可能な観測演算子に対しても微分可能な場合と同様に同化できることが先行研究で指摘されている (Zupanski et al., 2008) が，今回の実験では微分不可能な観測に対する解析精度は観測の精度を上回ることができなかった．これは不連続を含む関数の最適化問題の難しさに起因すると考えられる．

ETKF ではアンサンブル平均を解析変数とするため，接線形近似を避ける定式化が 2 通り存在する．観測演算子を作用させる前にアンサンブル平均をとって定式化すると，強い非線型性を持つ観測を同化した際に物理的に不安定な解が生成される．これは解析値の一部に広い範囲の観測が影響を及ぼすためであり，カルマンゲインの構造に原因がある．

特異値分解による解析から，アンサンブル平均をとった後に観測演算子を作用させると，観測空間に射影したアンサンブル摂動行列のランクが維持されず本来存在しないはずの特異値が現れてしまい，この偽の特異値に対応するモードが異常な重みを生み出していたことがわかった．これはアンサンブルによってカルマンゲインを表現する全てのアンサンブルカルマンフィルタに共通する問題であり，元々線形または弱い非線形を仮定して導出されているカルマンフィルタにおいては，非線型の場合でも線形の場合に満たされる性質をなるべく保持するように拡張する必要があることを示唆している．このような問題はアンサンブルメンバーとは独立なコントロールランに対して解析を行う MLEF では生じない．

微分不可能な観測の場合に，MLEF が期待される解析精度を示さなかった．これは観測項に含まれる高次の項の影響で，コスト関数の最適化が収束しづらいためであると考えられる．MLEF では収束性を高めるための前処理を導入しているが，最適化の反復開始の前に行う前処理の効果は強い非線形性を持つ観測演算子を用いる場合限定的である．そこで，反復の最中に前処理を再度行うリスタート法の導入を試みた．このリスタート法は最適化の収束性を改善するように見えたが，理論上観測への過剰適合となり適切な改善策とはいえなかった．最適化手法間の比較から，本実験においては共役勾配法を用いる場合が最も安定して高い解析精度を得られることがわかった．コスト関数のヘシアンを用いるニュートン法は前処理をした共役勾配法よりも適切にコスト関数の形状の情報を取り入れることができ，収束性を高めることが期待されたが，今回の実験ではその効果が解析精度に現れなかった．またどの最適化手法を用いても微分不可能な観測の同化性能は期待されるほど高くはなく，やはり最適化の収束性が大きな課題である．より多次元の問題になった場合には計算コストと精度のバランスも重要な要素となるため，どの最適化手法が最適であるかは明らかではない．従って接線形近似を用いるかどうかの選択については，観測項の正確な評価と最適化の収束性のバランスを考えたうえで判断する必要があることが示唆される．

本章の実験から，アンサンブル変分法が非線形観測に対してアンサンブルカルマンフィルタより優れた同化性能を示しうることがわかった．今後は各最適化手法の特性を踏まえて最適な手法を探求していく．

第 6 章

局所化手法の検証

本章では最尤法アンサンブルフィルタに局所化を導入し，その性能を検証する．また，観測空間局所化の導入方法に関して，考案手法（LMLEFCW）と Yokota et al. (2016) を参考に反復解法を取り入れた手法（LMLEFY）を実装し，従来の観測空間局所化を導入したフィルタ手法（LETKF）と比較する．本章前半では，第 1.2.2 節で例として取り上げた鉛直誤差共分散を利用して積算型観測を同化する実験を行い，モデル空間局所化と観測空間局所化の性能を比較する．本章後半では観測空間局所化を導入した 3 手法（LETKF，LMLEFY，LMLEFCW）に焦点を絞り，非線形観測を同化するサイクル実験による比較を行う．

6.1　積算型観測同化実験

まず鉛直積算型の観測を同化する理想化実験によって局所化手法間の比較を行う．実験設定は Bishop et al. (2017) を参考にした．

6.1.1　実験設定

鉛直一次元の気温プロファイルを推定する問題を考える．100 層に差分化し，真の予報誤差共分散を以下の式で与える（図 6.1 (i)）．

$$\{\mathbf{P}\}_{ij} = \sqrt{\frac{ij}{N^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{i-j}{d_1}\right)^2\right] + \sqrt{\left(1-\frac{i}{N}\right)\left(1-\frac{j}{N}\right)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{i-j}{d_2}\right)^2\right] \tag{6.1}$$

$$N = 100,\ d_1 = 1,\ d_2 = 8$$

これは鉛直方向の誤差共分散を想定しており，下層大気（i, j が小さい）ほど相関距離が長くなっている．予報変数の真値 $\mathbf{x}^t$ は真の予報誤差共分散に従う分布から生成する．

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{P}^{1/2}[\mathrm{randn}(N_\mathrm{s}, 1)] \tag{6.2}$$

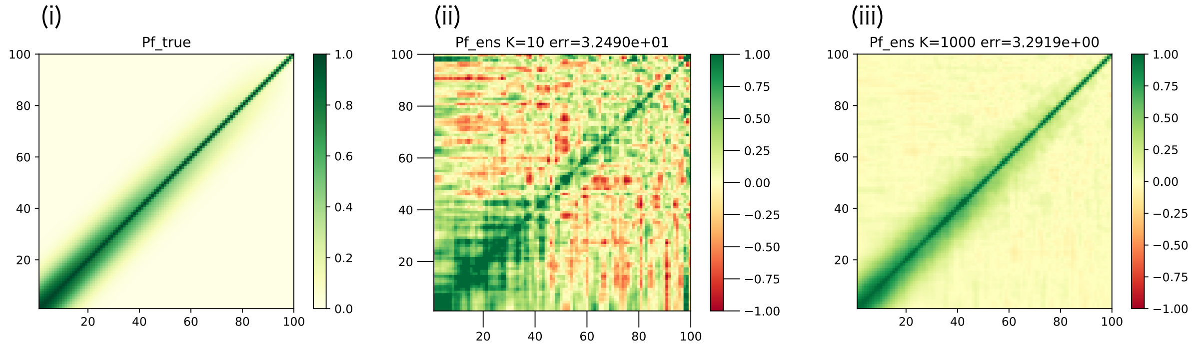

図 6.1: (i) 真の予報誤差共分散．(ii) 10 メンバーのアンサンブルで推定した誤差共分散，(iii) (ii) と同様，ただし 1000 メンバーで推定した共分散．図の上の err は真の共分散と推定共分散の差のフロベニウスノルムを示す．(i,ii) はそれぞれ図 1.5 (i,ii) の再掲

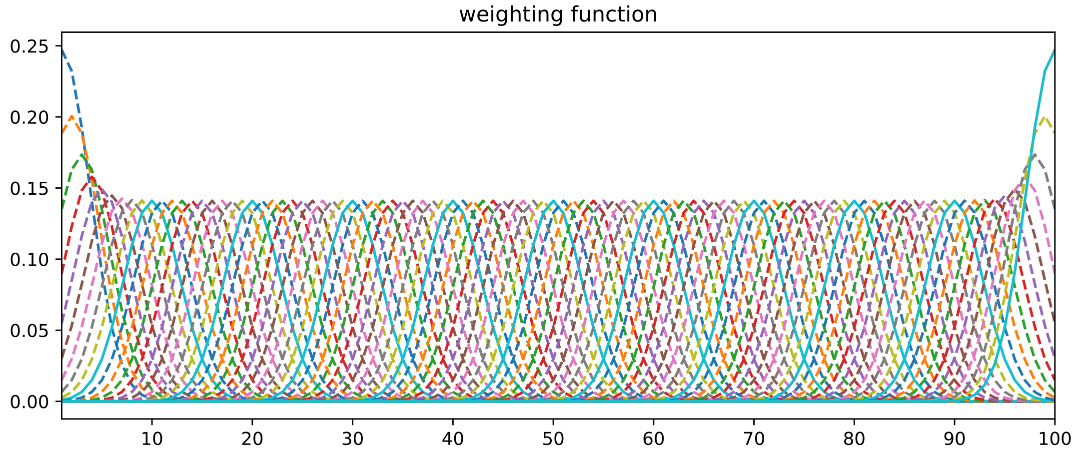

図 6.2: 積算演算子 $\mathbf{H}_2$ の行ベクトルとなる加重関数．横軸は鉛直レベル，縦軸が鉛直積算の重みを表す．各曲線が各行に対応する．10 本ごとに実線で示している．

$[\mathrm{randn}(m,n)]$ は平均 0，分散 1 の正規分布に従う乱数を要素とする $m \times n$ の行列（式 (6.2) ではベクトル）である．アンサンブルメンバー数は $N_\mathrm{e} = 10$ とする．10 メンバーで推定した誤差共分散は図 6.1 (ii) に示すように非対角成分の誤差が大きく，局所化の効果が明確に現れることが期待できる．

6.1.2　擬似観測の作成法

本研究では衛星による放射観測を想定した擬似観測を与える．大気上層における放射強度を表す放射伝達方程式は以下のように与えられる（地表面からの射出は無視する）．

$$R_\nu = \int_{z_0}^{\infty} B_\nu[T(z)] \frac{\mathrm{d}\tau(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z \tag{6.3}$$

$$= \int_{z_0}^{\infty} B_\nu[T(z)] K_\nu(z) \mathrm{d}z \tag{6.4}$$

R_ν は周波数 ν における単色放射強度，z_0 は地表面高度，$T(z)$ は気温の鉛直プロファイル，$\tau(z)$ は高度 z における透過率，$B_\nu[T(z)]$ はプランク関数を表し，$K_\nu(z) = \dfrac{\mathrm{d}\tau(z)}{\mathrm{d}z}$ は加重関数と呼ばれる．(6.4) の形から，気温を放射強度に変換する観測演算子（H）はプランク関数による（非線形）変数変換（H_1）と加重関数を重みとする積算（$\mathbf{H_2}$）によって構成される（$H = \mathbf{H}_2 H_1$）ことがわかる．本章の実験ではこの演算子を簡略化して観測を作成する．加重関数は図 6.2 に示すような単一ピークを持つものとする (Rodgers, 1976)．これはマイクロ波サウンダの加重関数を想定している．観測チャンネル数は $p = 100$ とし，各層にそれぞれピークをとる．変数変換 H_1 は 2 種類を用意する．

1. 線形変換
$$H_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

2. 非線形変換
$$H_1(\mathbf{x}) = \tanh(\mathbf{x})$$

観測は比較的正確であるとし，観測誤差共分散と観測を以下のように設定する．

$$\mathbf{R} = \frac{1}{64}[\mathrm{diag}(\mathbf{H}_2\mathbf{P}\mathbf{H}_2^{\mathrm{T}})] \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{y}^t + \mathbf{R}^{1/2}[\mathrm{randn}(p,1)] \\ &= H(\mathbf{x}^t) + \mathbf{R}^{1/2}[\mathrm{randn}(p,1)] \end{aligned} \tag{6.6}$$

$\mathrm{diag}(\mathbf{A})$ は行列 $\mathbf{A}$ の対角成分を要素とする対角行列である．

6.1.3 同化手法

同化手法は MLEF と ETKF を用いる．ETKF のアンサンブル平均と MLEF のコントロールは真値の生成 (6.2) と同じ式を用いて，異なる乱数から生成する．ETKF におけるアンサンブル摂動行列 $\mathbf{X}^{\mathrm{f}} = [\mathbf{x}^{\mathrm{f}(1)} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}}, \cdots, \mathbf{x}^{\mathrm{f}(N_{\mathrm{e}})} - \overline{\mathbf{x}^{\mathrm{f}}}]$ は，予報アンサンブルと真値が同じ分布に従うように以下の式を用いて作成する．

$$\mathbf{X}^{\mathrm{f}} = \mathbf{P}^{1/2}[\mathrm{randn}(N_{\mathrm{s}}, N_{\mathrm{e}})] \tag{6.7}$$

MLEF の予報誤差共分散の平方根行列は次式で生成する．

$$\mathbf{P}_{\mathrm{f,ens}}^{1/2} = (N_{\mathrm{e}} - 1)^{-1/2}\mathbf{X}^{\mathrm{f}} \tag{6.8}$$

この式を用いることで ETKF と MLEF が用いる第一推定値の予報誤差共分散が同一となるため，線形観測の場合は ETKF と MLEF の結果が一致する．

局所化手法は第 4.4 節で説明したモデル空間局所化と，第 4.5 節で説明した観測空間局所化を導入する．モデル空間局所化に用いる局所化行列 $\mathbf{F}$ は式 (6.1) において d_1,d_2 をそれぞれ 3 倍して作成する（図 6.3 (i)）．また $\mathbf{F}$ の平方根行列 $\mathbf{W}$ は，$\mathbf{F}$ を固有値分解

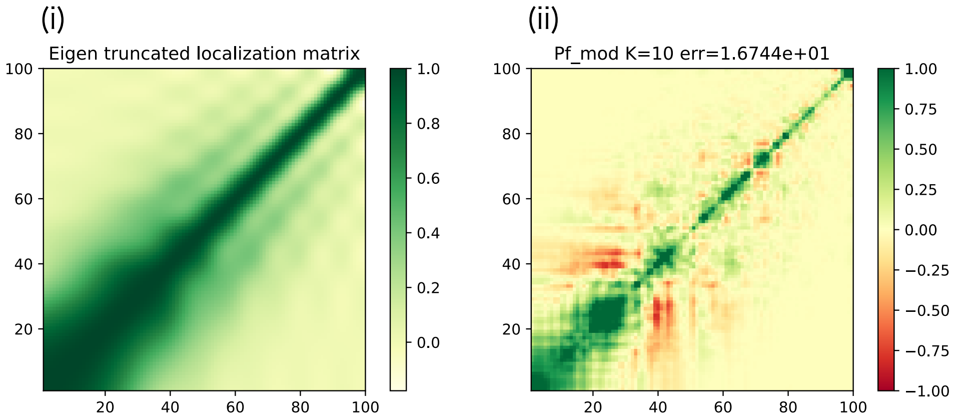

図 6.3: (i) 局所化行列の構造，(ii) 変調アンサンブルによって推定された予報誤差共分散．(i) は図 1.5 (iii) の再掲

名称	同化手法	局所化手法
MLEF	MLEF	なし
MLEF-B	MLEF	モデル空間（第 4.4 節）
LMLEFCW	MLEF	観測空間（第 4.5.2.2 節）
LMLEFY	MLEF	観測空間（第 4.5.2.1 節）
ETKF	ETKF	なし
ETKF-B	ETKF	モデル空間（第 4.4 節）
LETKF	ETKF	観測空間（第 4.5.1 節）

表 6.1: 積算型観測同化実験の実験設定

し上位 10 モード（寄与率 85%）の固有値・固有ベクトルの組を用いて作成する．変調アンサンブルによって局所化を導入したアンサンブルによる $\mathbf{P}^{\mathrm{f}}$ を図 6.3 (ii) に示す．変調アンサンブルのアンサンブル数は $N_{\mathrm{e}} \times 10 = 100$ に増えている．局所化前の $\mathbf{P}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{ens}}$（図 6.1 (ii)）と比べて非対角成分のノイズが抑えられ，真値からの誤差（図の上の err）が小さくなっていることがわかる．観測空間局所化では，第 i 層の状態変数と第 j 層にピークをとる観測との間の距離を式 (6.1) で定義し，観測誤差の重みの調整 (4.94,4.95) に用いる F_{ij} を局所化半径を 3 としたガウス型関数 (4.83) によって計算することで，モデル空間局所化と同様の局所化を行う．実験設定を表 6.1 にまとめる．

6.1.4　精度評価

実験は乱数のシードを変えながら 10 回繰り返す．各手法の解析精度は解析値と真値との二乗平均平方根誤差（RMSE）と第一推定値と真値との RMSE の比（RMSE Ratio, RR）を用いて評価する．

$$\mathrm{RR} = \frac{\mathrm{RMSE[analysis]}}{\mathrm{RMSE[first\ guess]}} \tag{6.9}$$

RR は小さいほど精度が良く，1 より大きい値は第一推定値より解析精度が悪化していることを表す．解析精度の上限の目安として，1000 メンバーのアンサンブルを用いた MLEF の結果を用いる．1000 メンバーで推定した誤差共分散（図 6.1 (iii)）は真の誤差共分散とよく似ており，サンプリング誤差の影響が現れないと考えられる．

解析誤差共分散の推定精度を評価するうえで，線形観測の場合はカルマンフィルタによって求められる解析誤差共分散が統計的期待値であり，参照値として用いることができる（Bishop et al. (2017) の Appendix A）が，非線形観測の場合はそのような参照値が存在しない．そのため本研究では 1000 メンバーの MLEF による解析誤差共分散を参照値として解析誤差共分散の精度を評価する．評価指標は以下に示す 2 つを用いる．

1. 推定された解析誤差共分散 $\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{est}}$ と参照値 $\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{ref}}$ 間の重みつき二乗平均誤差（MSE）

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{N_{\mathrm{s}}^2}\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{s}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{s}}}\{\mathbf{F}\}_{ij}(\{\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{est}}\}_{ij} - \{\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{ref}}\}_{ij})^2 \tag{6.10}$$

2. $\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{est}}$ と $\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{ref}}$ 間の相関係数（CORR）

$$\mathrm{CORR} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{s}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{s}}}(\{\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{est}}\}_{ij}\{\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{ref}}\}_{ij})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{s}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{s}}}(\{\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{est}}\}_{ij})^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{s}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{s}}}(\{\mathbf{P}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{ref}}\}_{ij})^2}} \tag{6.11}$$

MSE は推定値と参照値間の振幅の違いを、CORR は構造の違いを測る指標である。式 (6.10) の右辺の $\mathbf{F}$ は局所化行列であり、サンプリング誤差が起こりやすく局所化によって強制的に振幅が抑えられる非対角成分の影響を取り除いて評価するために作用させている。MSE は小さいほど精度が良く、CORR は大きいほど精度が良いことを示す。

6.1.5 線形観測の結果

まず解析値の精度に関連して，図 6.4 に線形観測を同化した場合の RR を示す．MLEF（青）と ETKF（紫），MLEF-B（橙）と ETKF-B（茶），LMLEFCW（緑）と LETKF（桃）で結果が一致している．LMLEFY（赤）は領域全体で最適化を行う性質上 LMLEFCW や LETKF と一致しない．局所化を導入した手法は局所化なしの手法よりも RMSE の減少率が大きく，局所化が適切に作用していることがわかる．また 1000 メンバーの MLEF が最も高い精度を示しており，参照値として機能している．解析値の精度ではモデル空間局所化が観測空間局所化よりも高い精度を示しており，多くの先行研究で述べられている傾向と整合的である．さらに LMLEFY は LMLEFCW，LETKF よりも高い精度を示しており，試行回数は少ないが平均精度の差は 99% 以上有意である．これは最適化の違い

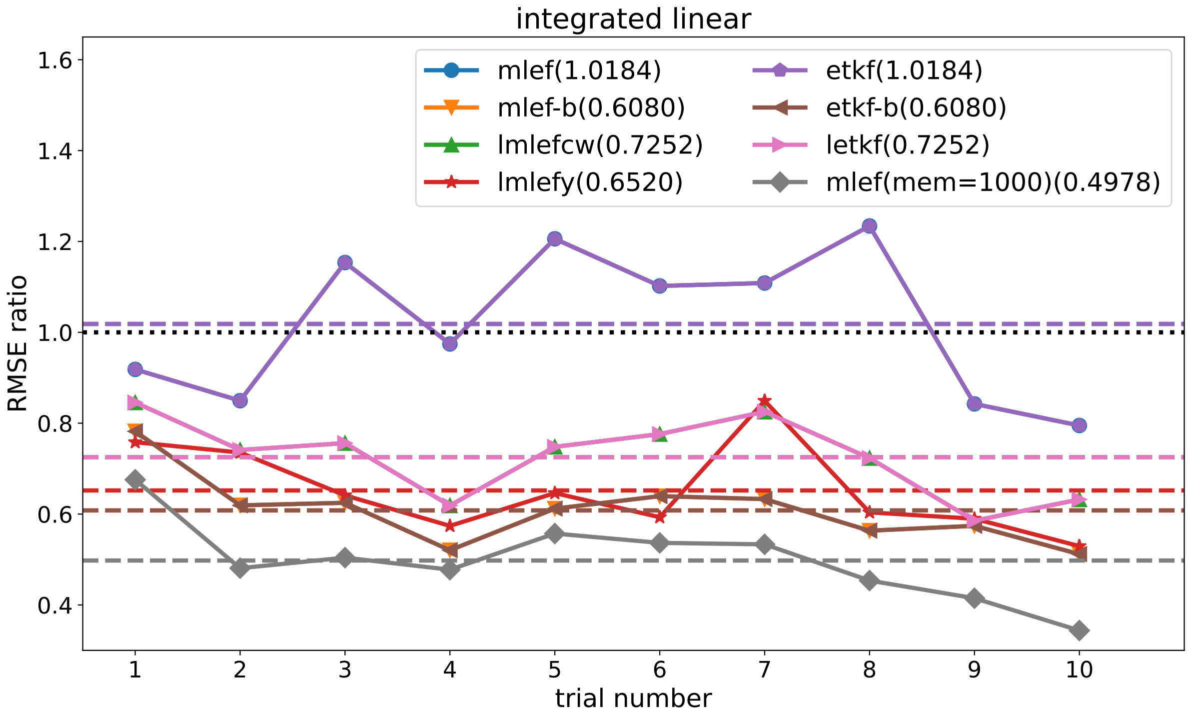

図 6.4: 線形観測を同化した場合の RMSE 比．凡例の数値と各色の破線は 10 回の試行平均を示す．点線は第一推定値と同精度の水準を表す

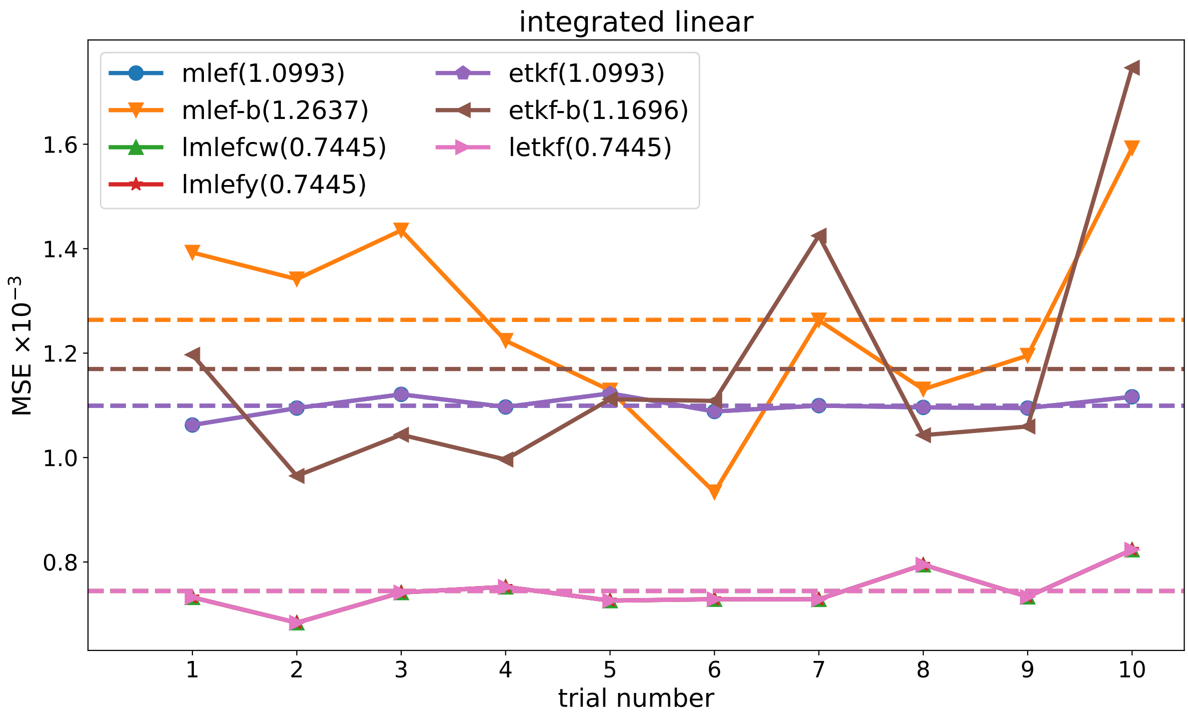

図 6.5: 図 6.4 と同様，ただし MSE

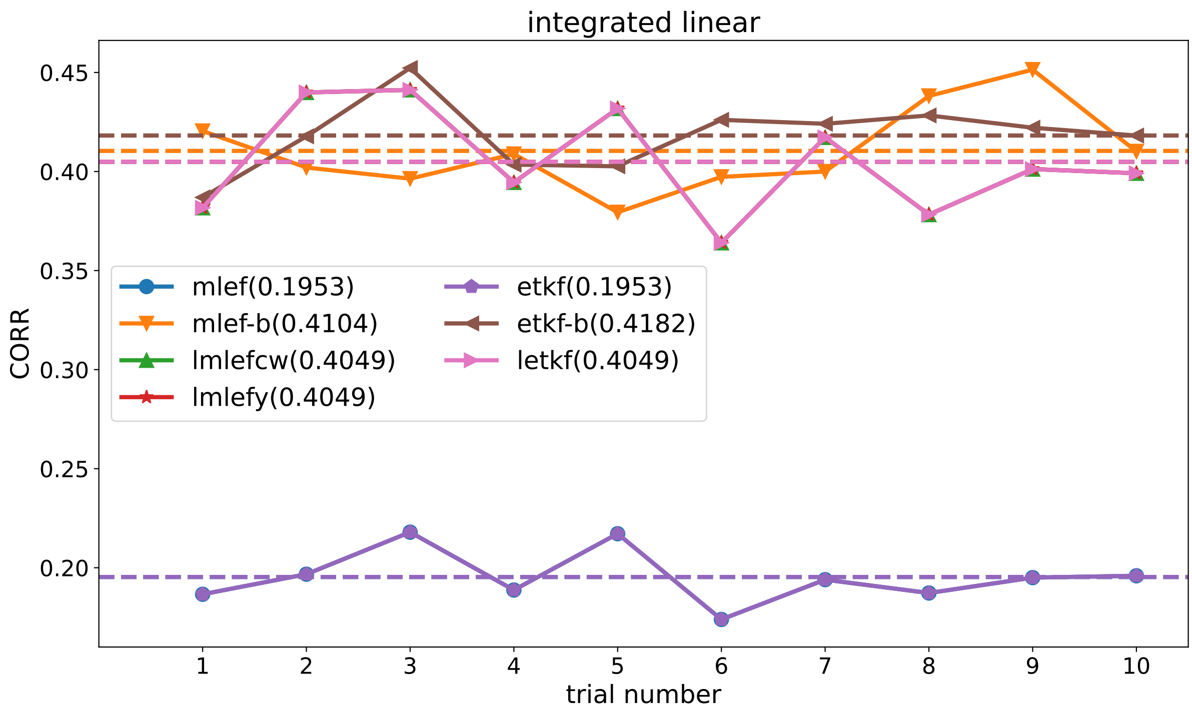

図 6.6: 図 6.4 と同様，ただし CORR

に起因すると考えられるが，コスト関数の背景項はアンサンブルによって推定した予報誤差共分散に依存する (4.64) ため，本実験のように予報誤差共分散が真の誤差共分散と大きく異なる場合にはコスト関数の値の差と解析精度の差は必ずしも対応せず，解析精度の違いを説明できない．今後他の形式の積算型観測に対する応答を調べ，今回見られた性能の違いが事例依存でないかどうかを確認するとともに，その性能の違いを説明する要因を検討していく．

次に解析誤差共分散の表現精度に関して，図 6.5，6.6 にそれぞれ線形観測を同化した場合の MSE，CORR の結果を示す．MSE と CORR では MLEF（青）と ETKF（紫），LMLEFCW（緑）と LMLEFY（赤）と LETKF（桃）の結果が一致しているが，MLEF-B（橙）と ETKF-B（茶）では解析アンサンブルのリサンプリングで用いる乱数の影響で結果が一致しない．特にモデル空間局所化における MSE は各試行ごとのばらつきが大きく，局所化なしよりも平均精度が劣ってしまっている．モデル空間局所化で顕著に MSE が増加している 10 回目の試行における解析誤差共分散の構造を図 6.7 に示す．参照値（図 6.7 (i)）は上層（右上）ほど振幅の大きい三重対角に近い構造をとる．この構造は試行ごとに差がなく，また線形条件下での期待値であるカルマンフィルタの解とも整合的である．局所化なしの場合（図 6.7 (ii)），振幅が参照値の約 1/40 程度であり，解析誤差を非常に過小評価している．また非対角成分に対角に近い成分とほぼ同程度の振幅を持つ構造が格子状に現れており，CORR が低くなる原因となっている．全体の振幅の小ささのために，MSE は大部分を対角成分の差が占めており，試行によらずほぼ一定値となっている．一方局所化をした場合（図 6.7 (iii–v)）には解析誤差の過小評価傾向がほとんど見

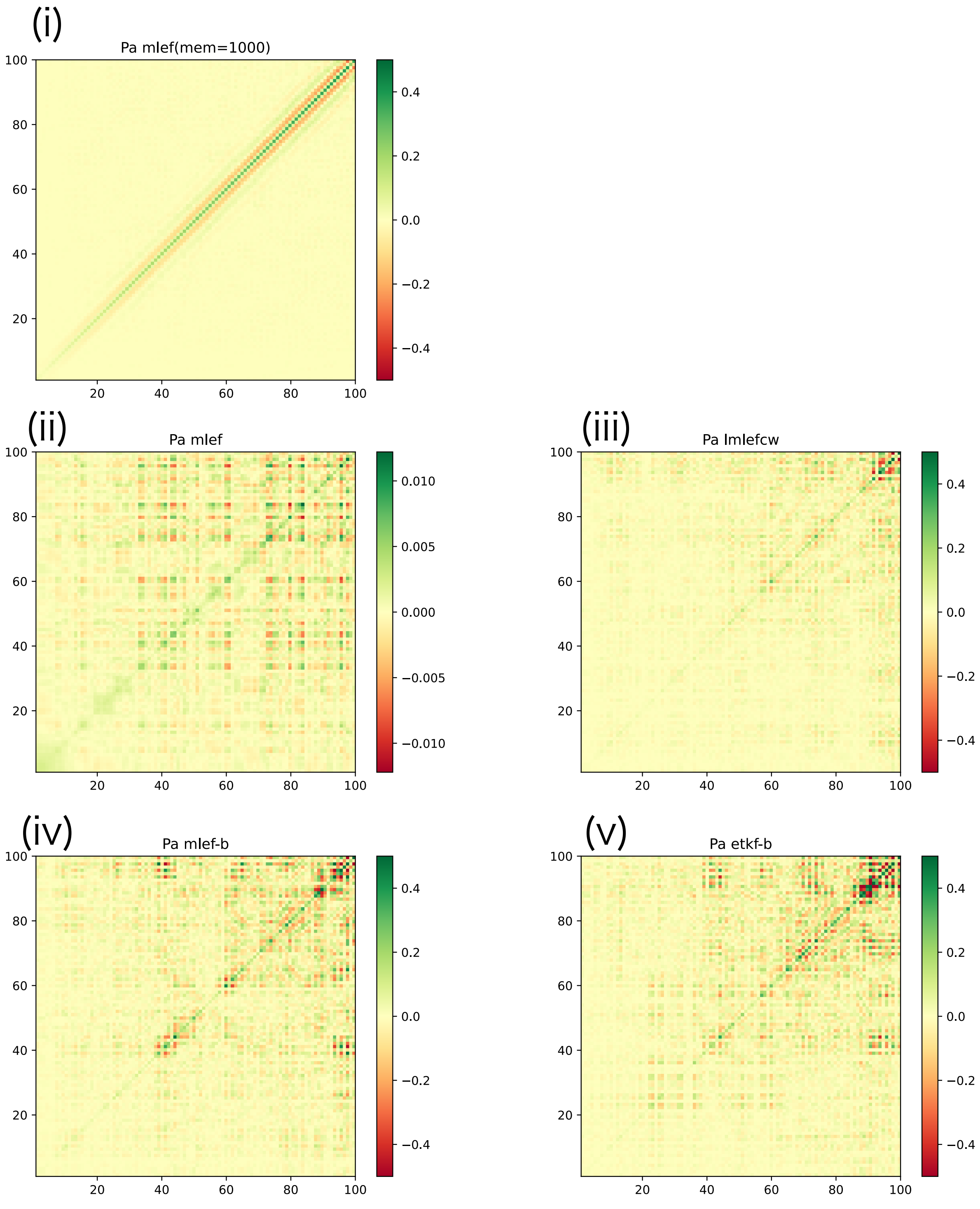

図 6.7: 10 回目の試行における解析誤差共分散の構造．(i) 参照値（1000 メンバーの MLEF），(ii) MLEF，(iii) LMLEFCW，(iv) MLEF-B，(v) ETKF-B の結果を示す．(ii) のみスケールが他の 4 図とは異なっている

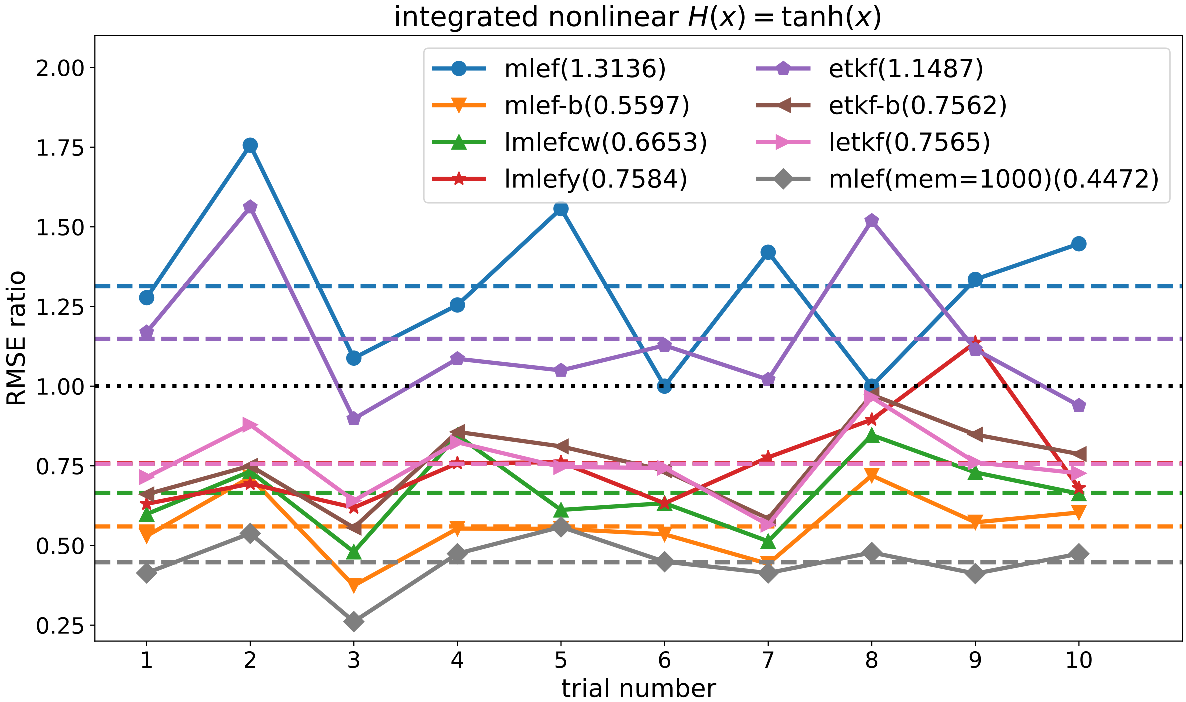

図 6.8: 非線形観測を同化した場合の RMSE 比．図の見方は図 6.4 と同様

られず，また上層ほど振幅の大きい特徴をよく捉えている．しかしモデル空間局所化（図 6.7 (iii,iv)）では上層を中心に非対角成分にも振幅の大きい構造が現れており，従ってモデル空間局所化における MSE の増加は非対角成分のノイズが大部分を占めている．これは解析アンサンブルのリサンプリングに伴うサンプリング誤差の影響であると考えられる．リサンプリングに伴うサンプリング誤差は，乱数以外のリサンプリング手法 (Bishop et al., 2017) 等を用いることで改善することが期待されるが，その導入は今後の課題である．観測空間局所化手法は，解析値の精度はモデル空間局所化に劣っていたが，解析誤差共分散の精度はモデル空間局所化と同等もしくは高く，誤差分布の推定性能は非常に高いことがわかる．

6.1.6　非線形観測の結果

次に非線形観測を同化した場合の解析精度を図 6.8 に示す．MLEF は局所化なしの場合を除いて ETKF よりも高く，第 5 章でも示した通り最適化の効果が現れている．局所化なしの MLEF は 6 回目と 8 回目の試行を除いて第一推定値から精度が悪化している．6 回目と 8 回目の試行もコスト関数を減少させる解を見つけることができず，解析値が第一推定値から変化していない．これは前節で述べたように，予報誤差共分散の精度が低いためにコスト関数の減少が解析精度と対応しないことが原因であると考えられる．ETKF では線形の時に見られたモデル空間局所化と観測空間局所化の性能差が見られず，非線形観測同化の難しさが局所化の効果を上回っていることがわかる．観測空間局所化手法同士

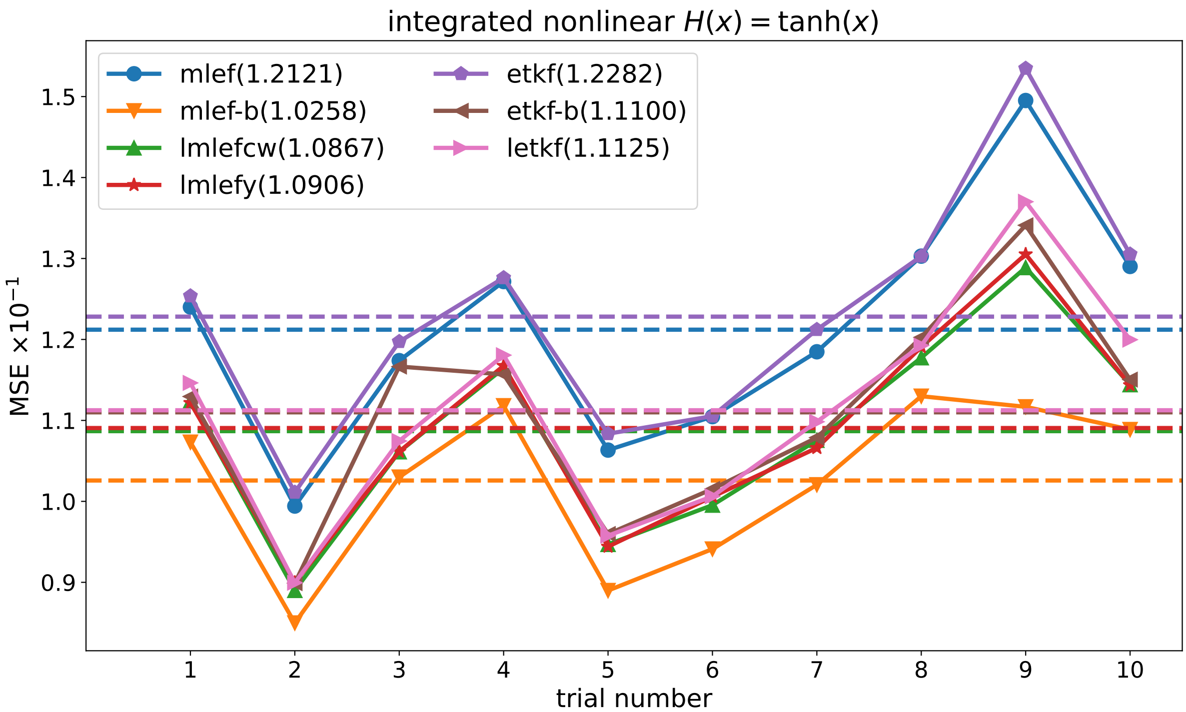

図 6.9: 図 6.8 と同様，ただし MSE．線形の場合（図 6.5）とスケールが異なる

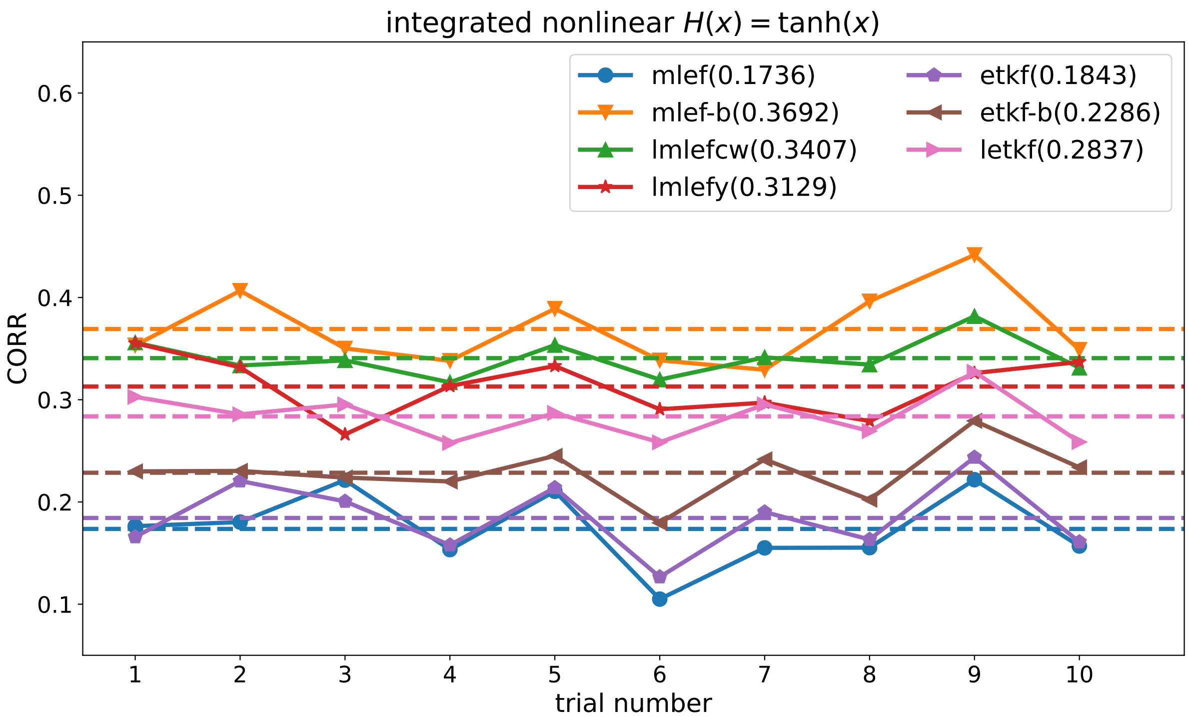

図 6.10: 図 6.8 と同様，ただし CORR

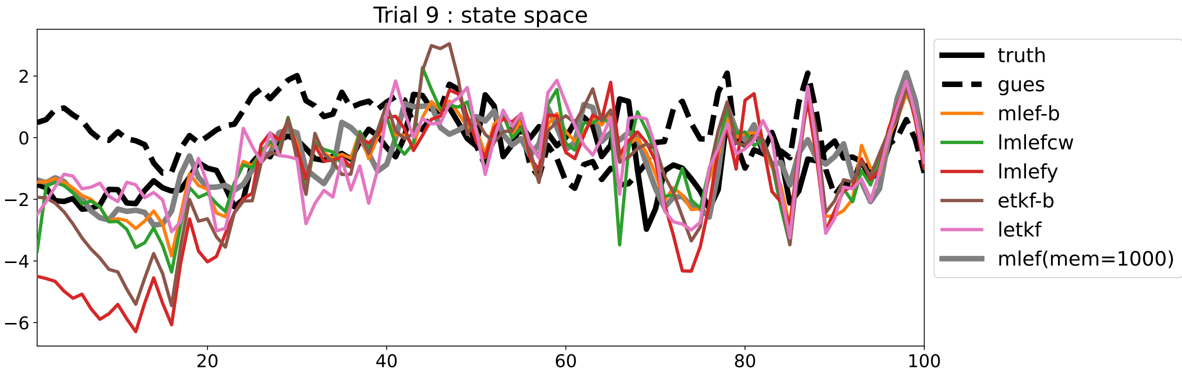

図 6.11: 9 回目の試行における解析値の分布．横軸は鉛直位置を示し，黒の太実線と太破線でそれぞれ真値と第一推定値，灰色の太実戦で 1000 メンバーの MLEF の解析値を表す．その他の解析値の線の色と手法の対応は図 6.8 等と同様

で比較すると，本研究で考案した LMLEFCW は LETKF と LMLEFY よりも高い平均精度を示している．LMLEFY との差は有意ではないが，LETKF との差は 99% 以上有意である．従って LMLEFCW は LETKF よりも精度が高く，LMLEFY と遜色ない性能を有すると言える．この結果から，考案した近似的な結合係数の扱い方でも非線形性を十分正確に評価できていることが示唆される．

解析誤差共分散の平均精度（図 6.9，6.10）も解析値と同様に，局所化を入れた場合に MLEF の方が ETKF よりも高精度であり，特に MLEF-B は突出した精度を示している．差が最も顕著な 9 回目の試行における解析値の分布を図 6.11 に，解析誤差共分散の構造を図 6.12 に示す．非線形観測同化の場合，参照値の解析誤差共分散（図 6.12 (i)）は線形と同様三重対角に近い構造を示すが，20 層より下，70–80 層目付近，90 層より上などの誤差の大きい位置（図 6.11）に振幅のピークを持ち，このピーク位置は試行ごとに異なる．局所化を導入した手法による推定値（図 6.12 (ii–vi)）を見ると，どの手法も解析誤差の過小評価傾向は見られるものの，特に MLEF-B がこれらのピーク構造をよく捉えていることがわかる．

本節の実験から，積算型観測を同化した場合の解析精度は多くの先行研究で述べられている通り，モデル空間局所化の方が観測空間局所化よりも高いことが示された．一方で解析誤差共分散の推定精度は必ずしもモデル空間局所化の方が優れているわけではなく，解析アンサンブルの選択方法が鍵を握っていることが示唆される．また非線形性と積算を組み合わせると，コスト関数最適化による反復解法を解析に用いる MLEF が局所化手法によらず ETKF を上回る精度を示した．このことから，精度に対する寄与は積算よりも非線形性への応答の方が大きいことが示唆される．

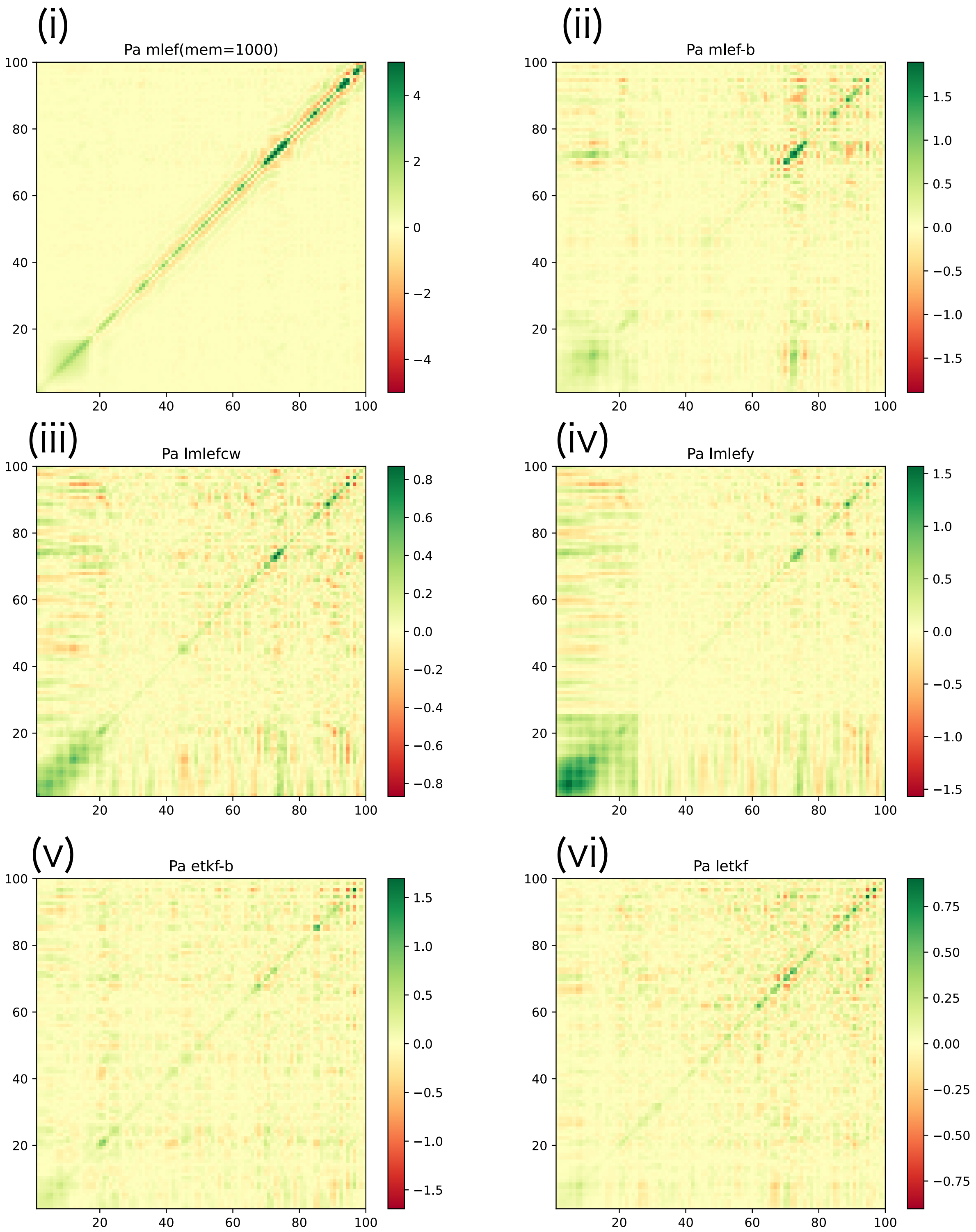

図 6.12: 9 回目の試行における解析誤差共分散の構造．(i) 参照値（1000 メンバーの MLEF），(ii) MLEF-B，(iii) LMLEFCW，(iv) LMLEFY，(v) ETKF-B，(vi) LETKF の結果を示す．スケールは図ごとに異なる

6.2 サイクル実験

次に本研究で導出した手法（LMLEFY，LMLEFCW）をさらに検証するために，観測空間局所化手法間の違いに焦点を当て，サイクル実験による比較を行う．

6.2.1 実験設定

6.2.1.1 使用モデル

サイクル実験における予報モデルには，1 次元 40 変数の Lorenz モデル (Lorenz, 1995; Lorenz and Emanuel, 1998)

$$\frac{\mathrm{d}X_k}{\mathrm{d}t} = -X_{k-1}(X_{k-2} - X_{k+1}) - X_k + F \quad (k = 1, \cdots, K\ K = 40) \tag{6.12}$$

を用いる（以下 L96 と呼ぶ）．境界は周期性（$X_0 = X_K, X_{K+k} = X_k, X_{-k} = X_{K-k}$）を持つ．L96 は K 分割された緯度円上の大気要素の時間発展を模している．第 1 項の非線形項は移流を表し，移流だけの場合は全エネルギー $\sum_{k=1}^{K} X_k^2/2$ が保存される．第 2 項の線形項は内部散逸，第 3 項は定常外力を表す．L96 は係数が消えるように無次元化されており，1 時間単位を 5 日とみなすと誤差の倍加時間が大気大循環モデルと同等になる．L96 の振る舞いは外力項 F の大きさによって決まる（閾値は K に依存する）．

- $F \ll 1$　定常解 $^\forall X_k = F$ に収束する（図 6.13 (i)）．
- $F < 4.0$　波数 8 の周期解に収束する（図 6.13 (ii)）．
- $4.0 \leq F$　周期性を持たず不規則に変化する（カオス性を持つ，図 6.13 (iii,iv)）．

本研究では $F = 8$ とした．このとき誤差の倍加時間は 0.42 無次元時間であり，これを 2.1 日とみなす．時間積分には 4 次の Runge-Kutta スキームを用い，時間刻み幅は 0.005 無次元時間（0.6 時間）とした．

真値は正規乱数から 100 年間積分した時点を初期値とし，100 日間積分して作成する（図 6.13 (iv)）．真値の変動の空間平均は 2.32，空間平均した標準偏差は 3.63 である．同化実験におけるモデルの設定は，真値の作成に用いたものと同一とする（完全モデル実験）．同化実験の初期値も異なる乱数から真値の初期値と同様に作成する．アンサンブルメンバー数は 20 メンバーとする．

6.2.1.2 観測演算子

簡単のため観測時刻は全て解析時刻と同じであり，40 点全点で観測が得られるものとする．観測は真値に観測演算子を作用させた後，平均 0，標準偏差 σ_O のガウス分布 $N(0, \sigma_O)$ に従う誤差を加えて作成する．

$$\mathbf{y}^{\mathrm{obs}} = H(\mathbf{x}^{\mathrm{true}}) + \varepsilon \quad (\varepsilon \sim N(0, \sigma_O)) \tag{6.13}$$

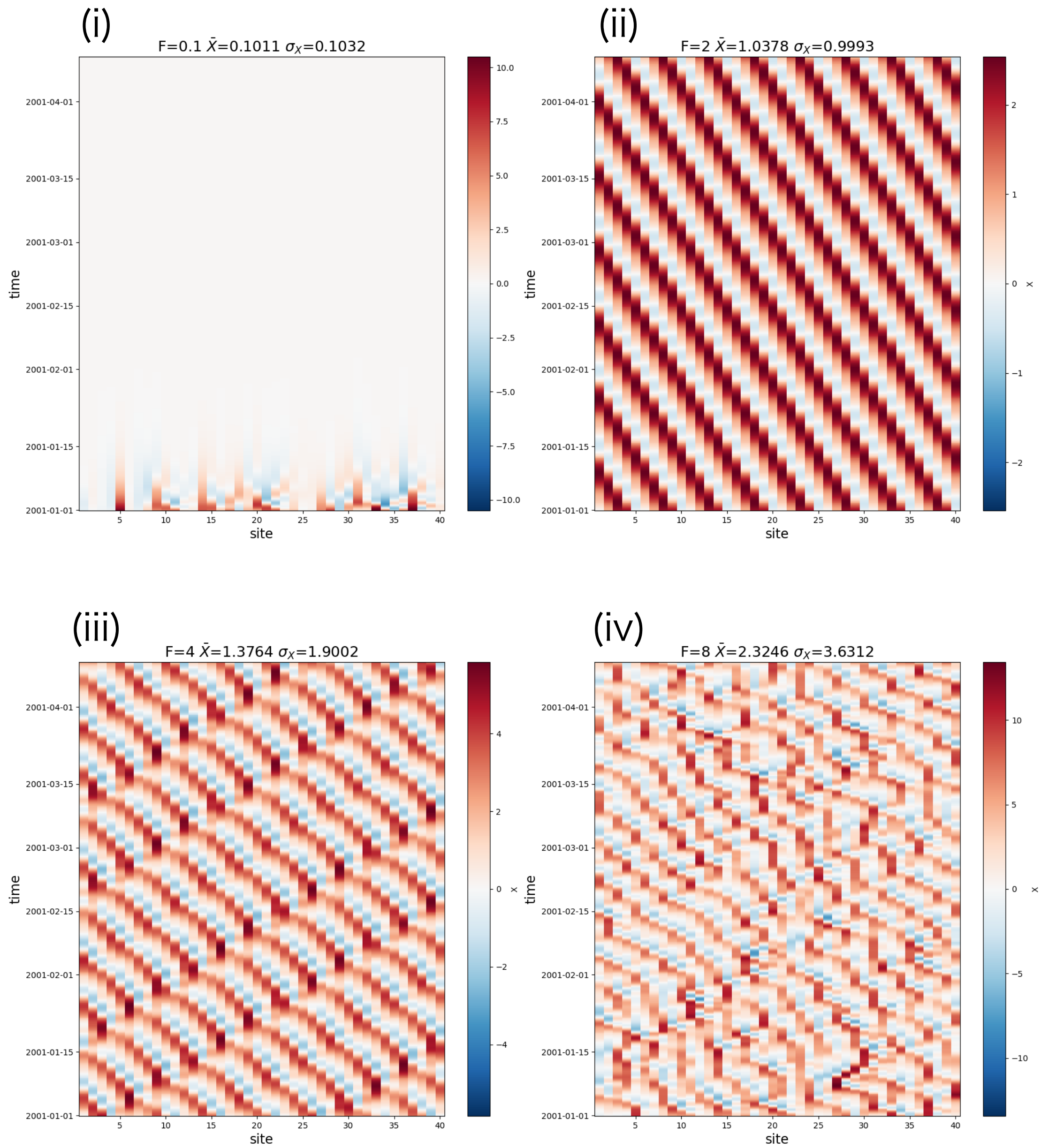

図 6.13: 外力項 F の大きさを変えた時の L96 の振る舞い．横軸に位置，縦軸に時間（下から上に進む）をとったホフメラー図で示す．(i) $F = 0.1$, (ii) $F = 2.0$, (iii) $F = 4.0$, (iv) $F = 8.0$

観測誤差標準偏差は $\sigma_O = 1$ と設定する．これは自然変動の約 27% に相当する．観測の時間間隔は 0.5 無次元時間（6 時間）とし，100 日間（400 サイクル）与える．

観測演算子は以下の式で与えられる (Asch et al., 2016).

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2}\left\{1 + \left(\frac{|\mathbf{x}|}{10}\right)^{\gamma-1}\right\} \tag{6.14}$$

γ は非線形性の強さを定めるパラメータであり，$\gamma = 1$ の時は $H(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ となる．この関

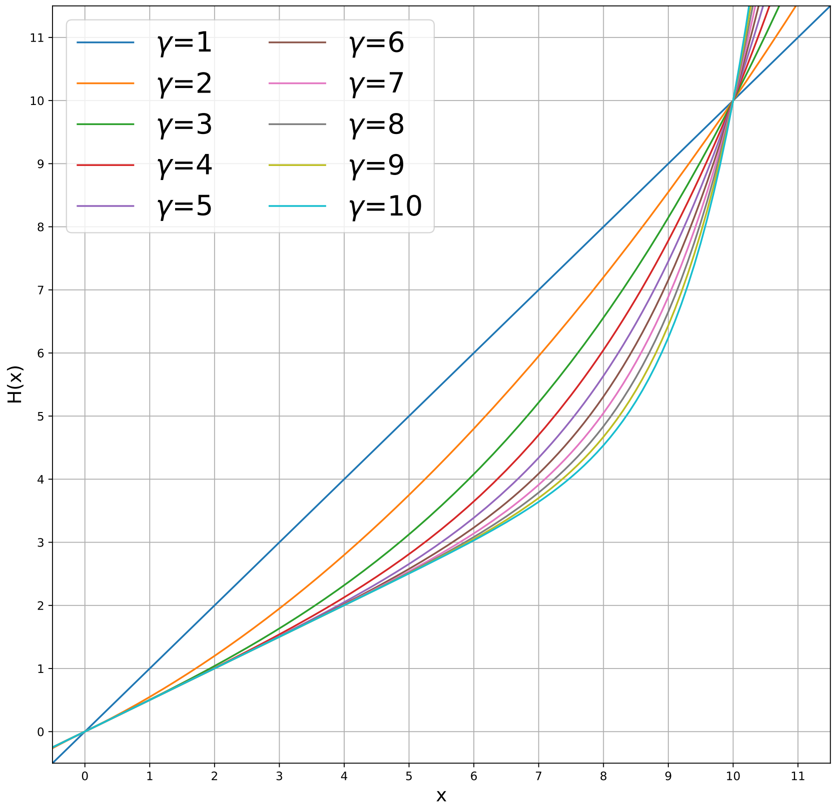

図 6.14: 式 (6.14) における x と $H(x)$ の関係

数は原点に対して反対称 $H(-\mathbf{x}) = -H(\mathbf{x})$ であり，$|x| \leq 10$ の範囲では $|H(x)| \leq |x|$ を満たす（図 6.14）．そのため γ を大きくとって非線形性を強めても，L96 の状態変数が取りうる値の範囲内では極端な値は取らない．

6.2.1.3　同化手法

実験は LETKF，LMLEFY，LMLEFCW の 3 種類の同化手法を用いて行う．実験初期値のアンサンブルは全ての実験で同一とするが，LMLEFY と LMLEFCW ではコントロールの初期値をアンサンブル平均とし，アンサンブル摂動を $\sqrt{N_{\mathrm{e}} - 1}$ でスケーリングする（cf. (6.8)）．この初期化操作によって初期の予報誤差共分散の推定値が全実験で同一となり，線形観測（$\gamma = 1$）の場合に最初のサイクルの解析値が LETKF と LMLEFCW で一致する．

サイクル実験で安定した精度を得るためには，局所化だけでなく共分散膨張も重要となる．本実験における共分散膨張の適用は Hunt et al. (2007) を参考に，LETKF の場合は式 (4.29)，(4.30)，LMLEFY と LMLEFCW の場合は式 (4.66) の第一項をそれぞれ以下

のように置き換える．

$$\mathbf{I}_{N_e} \to \frac{\mathbf{I}_{N_e}}{\rho} \tag{6.15}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} \to \frac{1}{2}\frac{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}}{\rho} \tag{6.16}$$

$\rho \geq 1$ は共分散膨張のパラメタである．ρ および局所化半径 r_{loc} は最適値を探索し，$\rho = 1.05$，$r_{\mathrm{loc}} = 3$ とした．

手法間で比較する精度指標には，真値と解析値間の RMSE を用いる．

6.2.1.4 結合係数の類似性

本研究で考案する LMLEFCW は結合係数が空間方向に大きく変化しないことを仮定している（第 4.5.2.2 節）．この仮定の妥当性を検証するため，結合係数の空間方向の類似性を定量的に評価する．本実験では類似性の指標として，i 番目と j 番目の格子における結合係数 $\mathbf{w}^i$，$\mathbf{w}^j$ 間の相関係数を各アンサンブルメンバーごとに定義する (Kotsuki et al., 2020).

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_k^i &= [w_k^i(t_1), \cdots, w_k^i(t_{\max})] \\
\mathbf{w}_k^j &= [w_k^i(t_1), \cdots, w_k^i(t_{\max})] \\
\mathrm{corr}[\mathbf{w}_k^i, \mathbf{w}_k^j] &= \frac{\mathrm{cov}[\mathbf{w}_k^i, \mathbf{w}_k^j]}{\{\mathrm{var}[\mathbf{w}_k^i]\}^{1/2}\{\mathrm{var}[\mathbf{w}_k^j]\}^{1/2}}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

k はアンサンブルメンバーのインデックス，$\mathrm{cov}, \mathrm{var}$ はそれぞれ $\mathbf{w}_k^i, \mathbf{w}_k^j$ 間の共分散と $\mathbf{w}_k^i, \mathbf{w}_k^j$ の分散を表す．$\mathbf{w}_k^i$ はサンプリング期間における i 番目の格子の結合係数の第 k 成分を並べたベクトルである．本実験ではサンプリング期間はスピンアップ期間を除いた 95 日間（380 サンプル）とした．$i = j$ のとき $\mathrm{corr} = 1$ であり，各 i に対して格子点数とアンサンブルメンバー数の積と等しい数の相関係数を得る．

6.2.2 LETKF，LMLEFY，LMLEFCW の比較

図 6.15 に解析精度の比較を示す．各 γ に対してそれぞれ 50 回の試行を行い，100 日間（400 サイクル）の実験期間のうち最初の 5 日間をスピンアップ期間として後半 95 日間の平均 RMSE を解析精度の指標としている．平均 RMSE（星印）は $\gamma = 10$ でも 3 手法全てで観測誤差を下回っており，3 手法とも高い性能を示している．非線形性が弱い（$\gamma \leq 4$）場合では 3 手法間の差は小さいが，非線形性が強くなると LMLEFCW が LETKF の精度を上回る．LMLEFY は $\gamma = 8$ のときにやや悪化しているが，それ以外では LETKF を上回る精度を示している．また LETKF は非線形性が強くなるにしたがって箱の範囲が広がり精度に試行ごとのばらつきが生じているのに対し，LMLEFY と LMLEFCW では試行間のばらつきが常に小さいことが見て取れる．特に LMLEFCW では箱の範囲が非

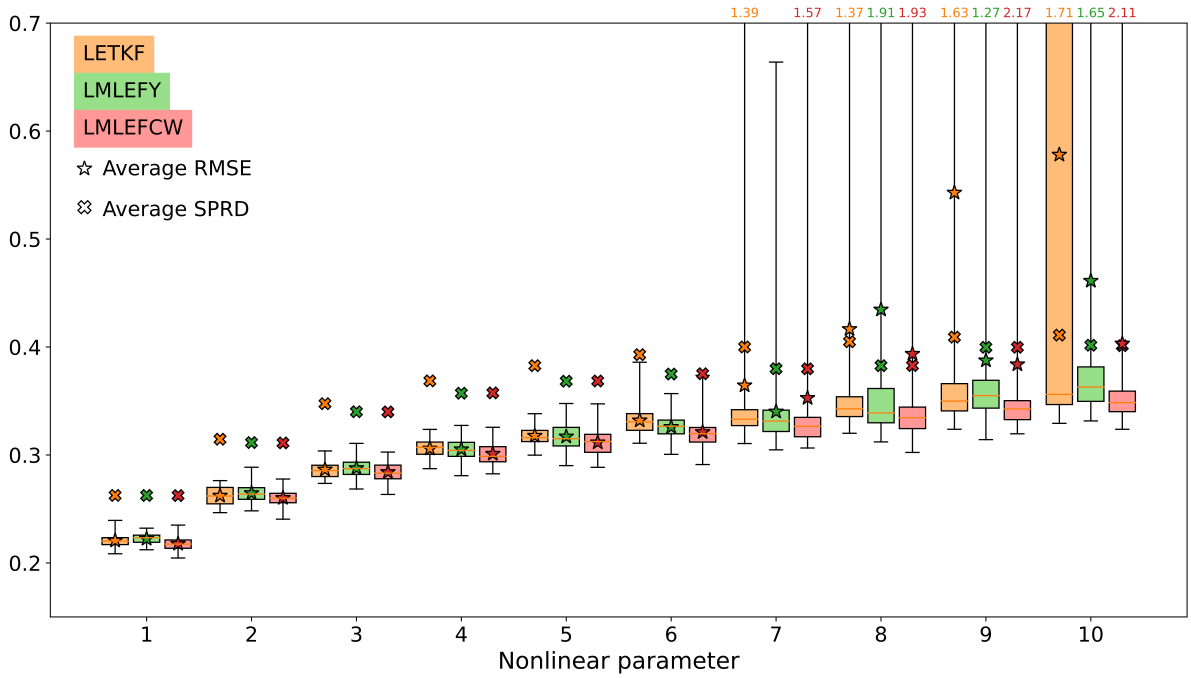

図 6.15: 非線形性パラメタ γ を変えたときの RMSE の箱ひげ図．横軸は γ の値，縦軸は RMSE またはアンサンブルスプレッドの大きさを示す．箱は第 1 四分位数から第 3 四分位数までを表し，ひげは最小値から最大値までを表す．縦軸の上限値は 0.7 であり，最大値が上限を超える場合は図の上に数値を示している．星印とバツ印はそれぞれ RMSE とアンサンブルスプレッドの試行平均を示す．

γ	LETKF-LMLEFY significance	LETKF-LMLEFY better	LETKF-LMLEFCW significance	LETKF-LMLEFCW better	LMLEFY-LMLEFCW significance	LMLEFY-LMLEFCW better
1	80–90	LETKF	98–99	LMLEFCW	>99	LMLEFCW
2	80–90	LETKF	80–90	LMLEFCW	>99	LMLEFCW
3	50–60	LETKF	80–90	LMLEFCW	95–98	LMLEFCW
4	<50	LMLEFY	98–99	LMLEFCW	90–95	LMLEFCW
5	<50	LMLEFY	>99	LMLEFCW	95–98	LMLEFCW
6	>99	LMLEFY	>99	LMLEFCW	90–95	LMLEFCW
7	85–90	LMLEFY	<50	LMLEFCW	<50	LMLEFY
8	<50	LETKF	<50	LMLEFCW	50–60	LMLEFCW
9	98–99	LMLEFY	95–98	LMLEFCW	<50	LMLEFCW
10	90–95	LMLEFY	>99	LMLEFCW	60–70	LMLEFCW

表 6.2: 平均 RMSE の差の t 検定による有意性判定の結果．significance は有意性をパーセントで表し，better は平均 RMSE が小さいほうの手法を表す

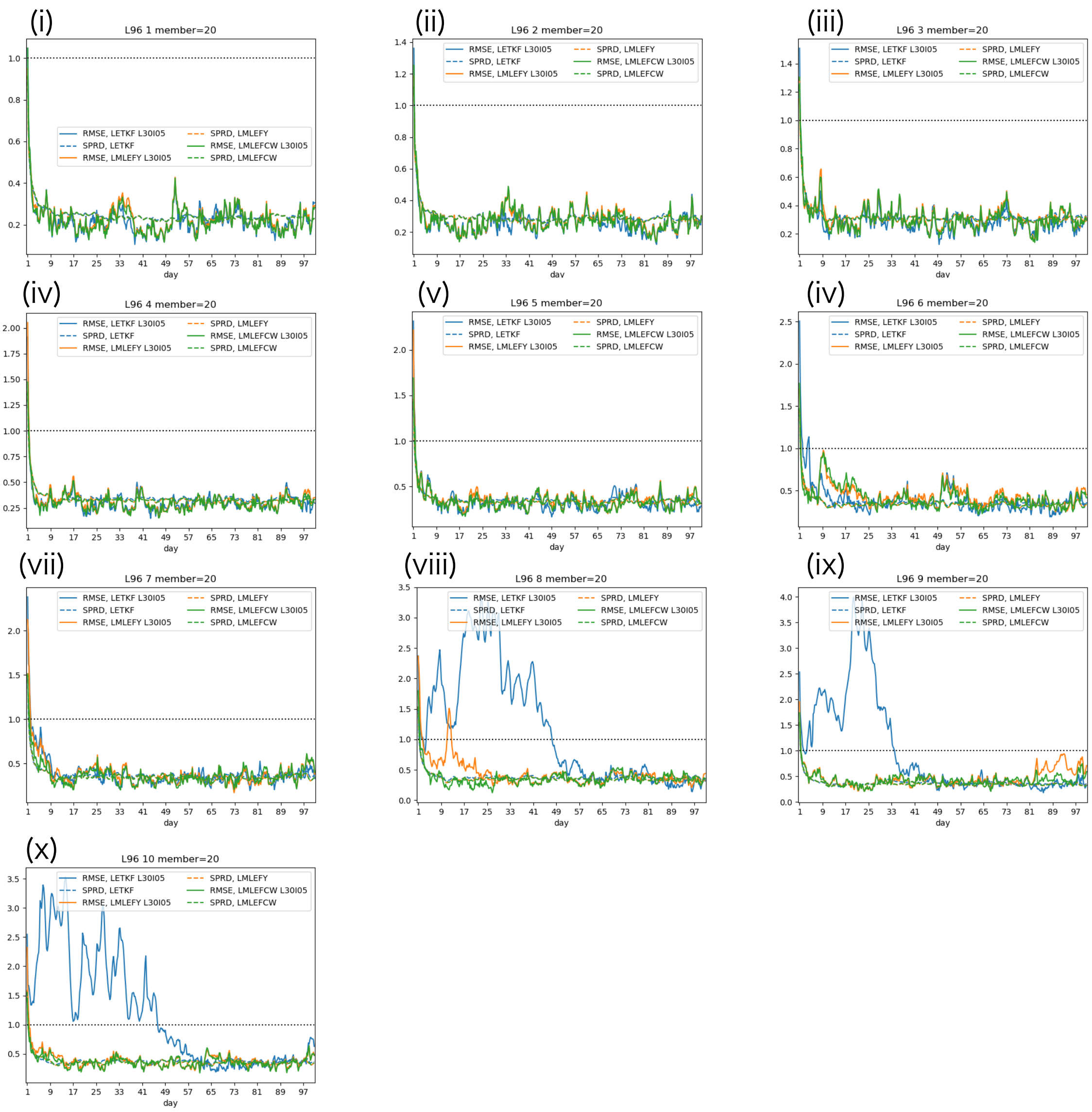

図 6.16: 各 γ における RMSE の時系列．横軸は同化サイクルを日付で表す．青が LETKF，橙が LMLEFY，緑が LMLEFCW であり，実線が RMSE，破線がスプレッドを示す．点線で観測誤差標準偏差を示す．(i–x) まで順に $\gamma = 1 \sim 10$ の結果を示す

線形性の変化に対してほとんど変化しないことがわかる．また平均アンサンブルスプレッドと平均 RMSE の差が非線形性が強いときに最も小さく，LMLEFCW の同化性能の頑強さを示している．一方で $\gamma \geq 7$ では最大 RMSE がどの手法でも大きくなっており，50 回中 1，2 回は観測誤差を解析誤差が上回るような失敗事例が含まれている．これは強非線形観測同化の難しさを表していると考えられる．

表 6.2 には平均 RMSE に対する有意性判定の結果を示す．有意性が低い部分もあるが LMLEFCW が一貫して LETKF よりも高い性能を示していることがわかる．LMLEFY は LMLEFCW よりも有意性が低いものの，$\gamma \geq 4$ ではばらつきの大きい $\gamma = 8$ を除いて LETKF よりも高い性能を示している．また LMLEFY と LMLEFCW では非線形性が

弱い領域で LMLEFCW が有意に高い精度を示すことがわかる．この要因ははっきりとはわかっていないが，LMLEFCW では解析格子ごとに最適化を独立に行うため LMLEFY よりも収束しやすいことが一因であると考えられる．なお，試行回ごとのばらつきが小さいため弱非線形 $\gamma = 1, 2$ の場合にかなり高い有意性が出ているが，実際の差はかなり小さいため性能の差をはっきり示しているとは考えにくい．

図 6.16 にはある試行における RMSE の変化を時系列で示す．$\gamma \leq 5$ までは初期の大きな誤差はスピンアップ期間のうちに急速に減衰し，その後は誤差の変動が見られるものの観測誤差（点線）よりかなり低い水準で推移することがわかる．γ が 6 を超えると誤差の減衰が遅くなり，特に $\gamma \geq 8$ では LETKF の誤差収束の遅さが顕著に現れている．

6.2.3　結合係数の一様性

LMLEFCW が前提としている結合係数一定の仮定が成り立っていることを確かめるため，図 6.17，6.18 に実験期間最後のサイクルにおける結合係数の分布を示す．精度が安定したサイクルにおいて，結合係数は非線形性の強さに依らず空間方向（横軸）に滑らかに変化していることがわかる．また手法間で比べると，モデルのカオス性のために解析値自体は類似していても解析アンサンブルは異なっているため，結合係数も手法間で異なる構造を持っている．図 6.19，6.20，6.21 には，最初のメンバーの結合係数分布の時間変化を示す．先ほどのスナップショットと同様に結合係数は空間方向に滑らかに変化しているが，時間方向の変動は激しいことがわかる．またサイクル前半（5–25 日，20–100 サイクル）の分布を示しているため，$\gamma = 1$ における 3 手法および LMLEFY と LMLEFCW の変化は類似している．非線形性が強くなると LMLEFY と LMLEFCW でも異なる構造を取り始める（図 6.21）．

結合係数の空間分布の一様性を定量的に評価するため，結合係数間の相関係数を距離別に統計を取って評価する（図 6.22）．非線形性が強くなるに従って相関係数のばらつきは大きくなるものの，平均値は大きく変化しないことがわかる．また結合係数に仮定を置かない LMLEFY では一貫して相関係数が LETKF や LMLEFCW よりも低く，結合係数の空間方向の自由度が比較的高い．局所化半径と同じ距離にある結合係数間の相関は LETKF と LMLEFCW で約 80 % を超えており，局所化半径内の結合係数は高い相関を持っている．解析格子と同じ位置にある観測と比較して観測の重みが 25 % になる距離でも LMLEFCW の相関係数は 0.5 を上回っており，解析に強い影響を与える範囲内での結合係数を一定とみる仮定は本実験においておおよそ成り立っていることを示している．

6.2.4　並列化によるスケーリング

本節の最後に並列化による高速化の可能性について述べる．LMLEFCW は最適化を解析格子ごとに独立に行うため，解析部分の大部分を並列実装することができる．一方

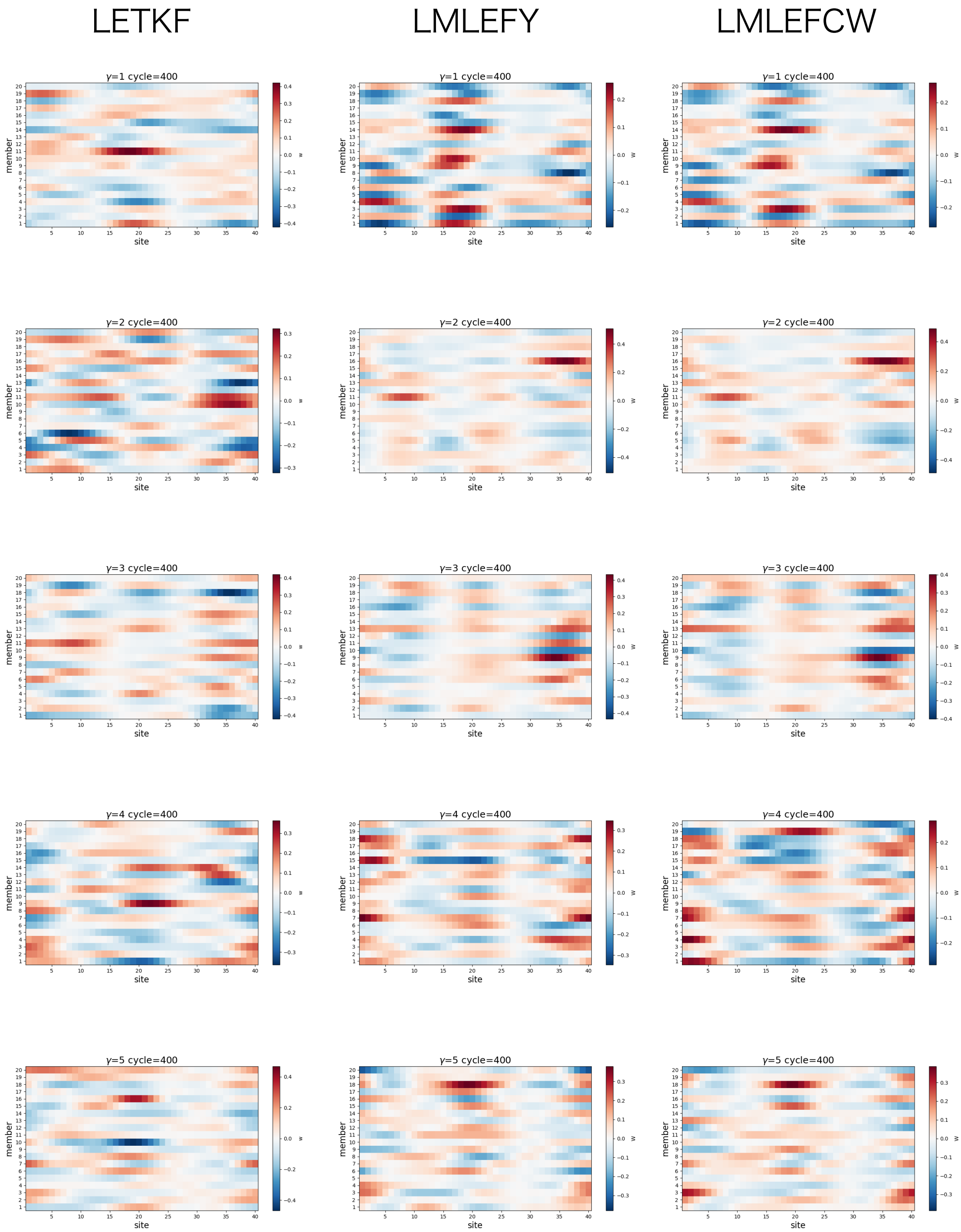

図 6.17: $\gamma = 1 \sim 5$ までの実験における，400 サイクル目における結合係数の空間分布．横軸は位置，縦軸はメンバーを表す．

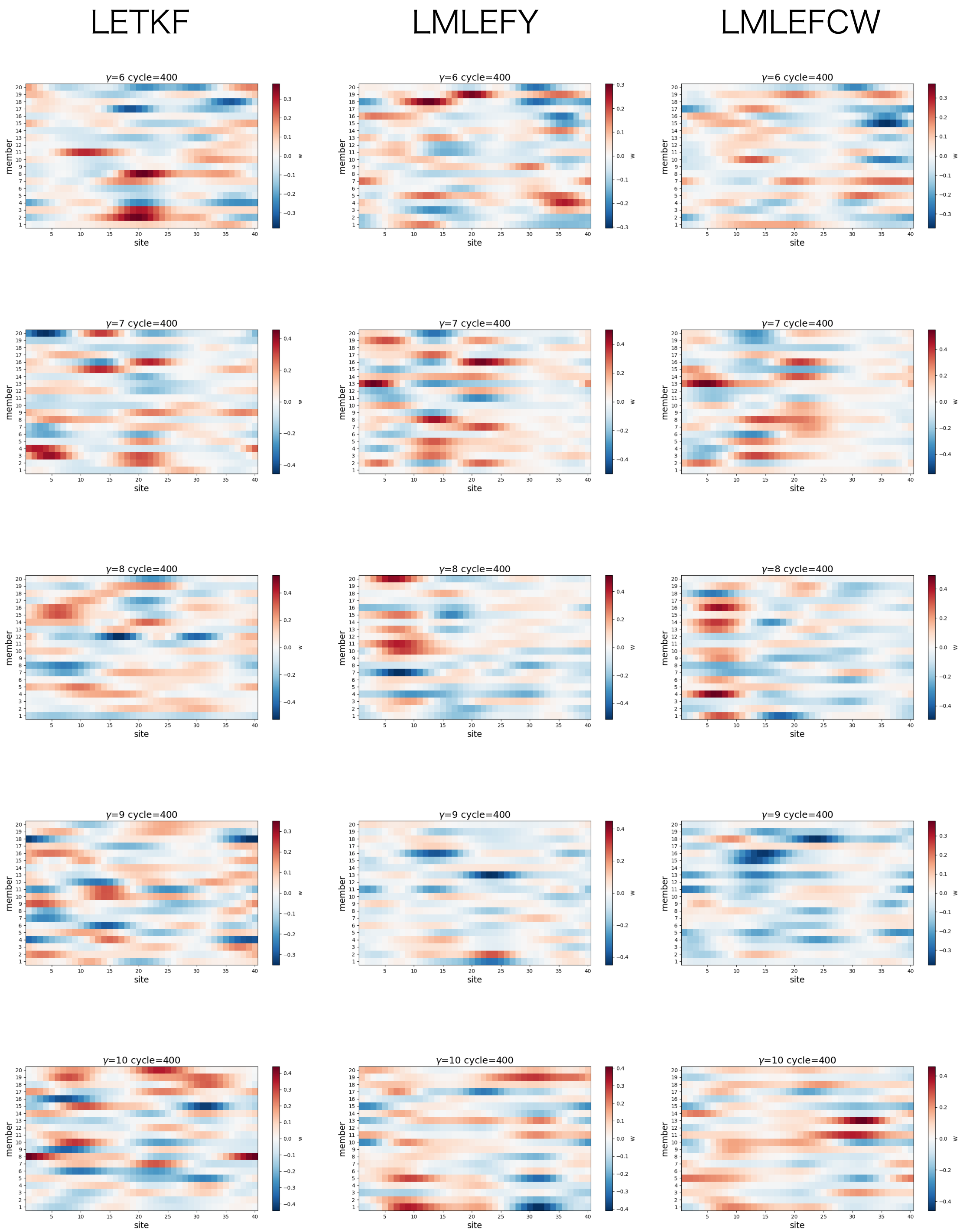

図 6.18: 図 6.17 と同様．ただし $\gamma = 6 \sim 10$ の実験

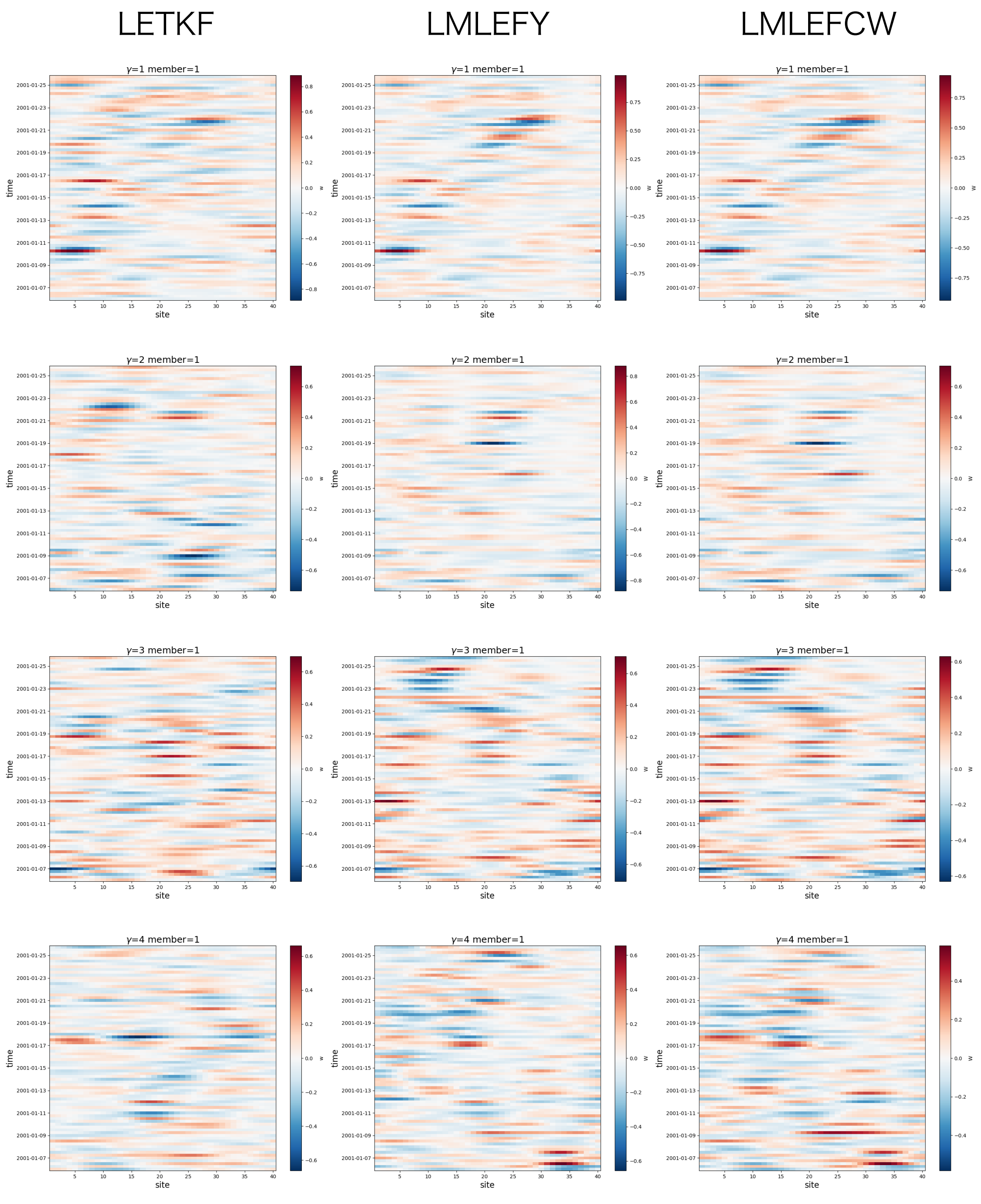

図 6.19: $\gamma = 1 \sim 4$ の実験における，最初のメンバーの結合係数の時間変化．横軸は位置，縦軸は初期時刻を 2001 年 1 月 1 日 0 時とした時刻をとっている．5 日目から 25 日目までの分布を示す

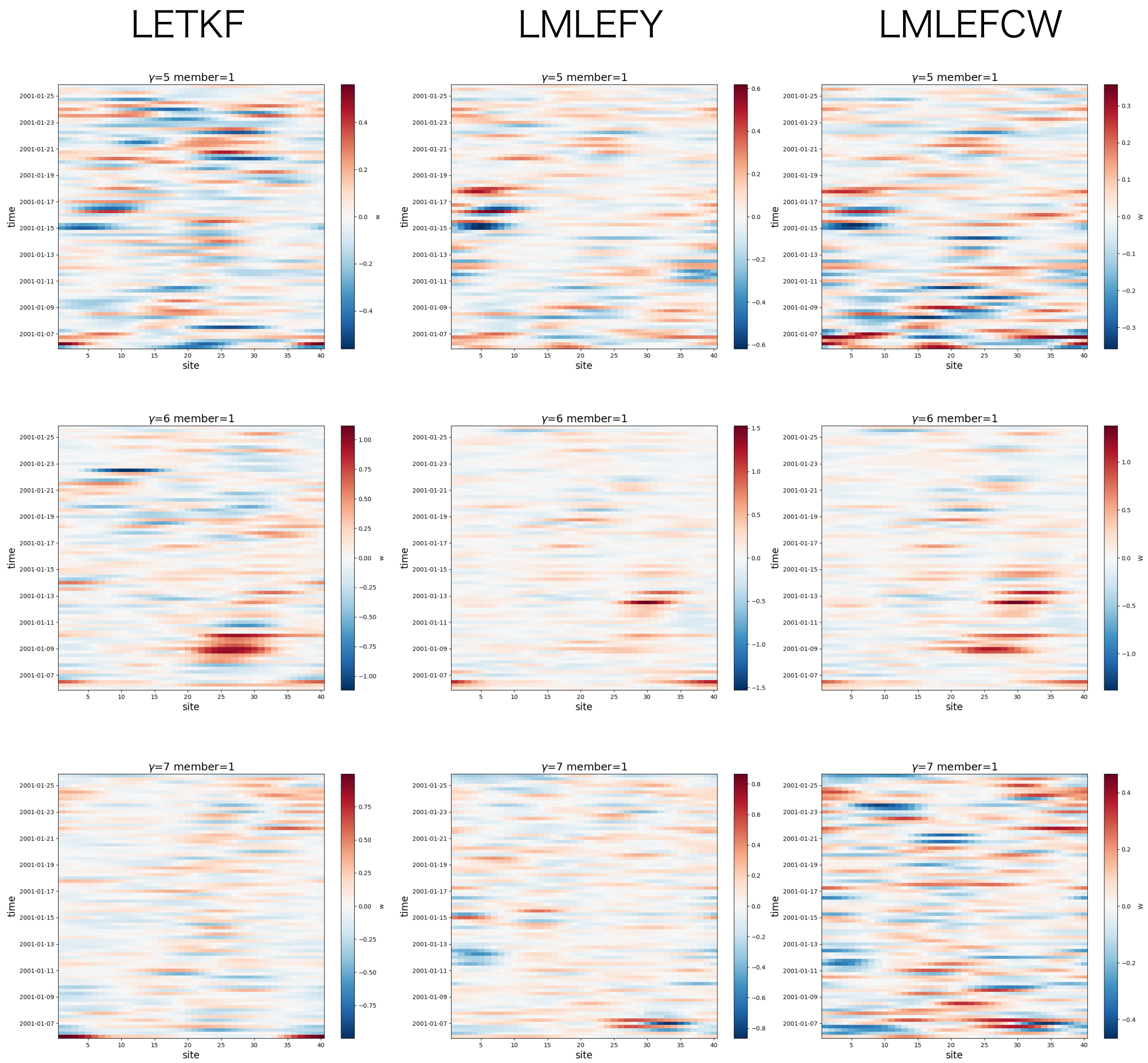

図 6.20: 図 6.19 と同様，ただし $\gamma = 5 \sim 7$ の実験

LMLEFY は最適化を解析領域全体で一斉に行うため並列実装できる部分が限られており，最適化の反復ごとに通信を要する．本章で扱った L96 は次元の小さいモデルのため通信にかかる時間が短く，実験全体にかかる時間は LMLEFY の方が LMLEFCW よりも短い．しかし並列実装した場合の解析部分にかかる時間の変化が大きく異なる（表 6.3）．LMLEFY では 4 並列でも 50 % の高速化に留まっているのに対し，LMLEFCW では並列数から想定されるものとほぼ等しい高速化を達成している．並列化後でも解析にかかる時間は LMLEFY よりも長いが，より高次元で通信にかかる時間が長くなることが想定される状況では LMLEFCW の方が高速化できる可能性が高いことを示している．

6.3　まとめ

本章では局所化を導入した MLEF の性能を 2 種類の理想化実験によって検証した．

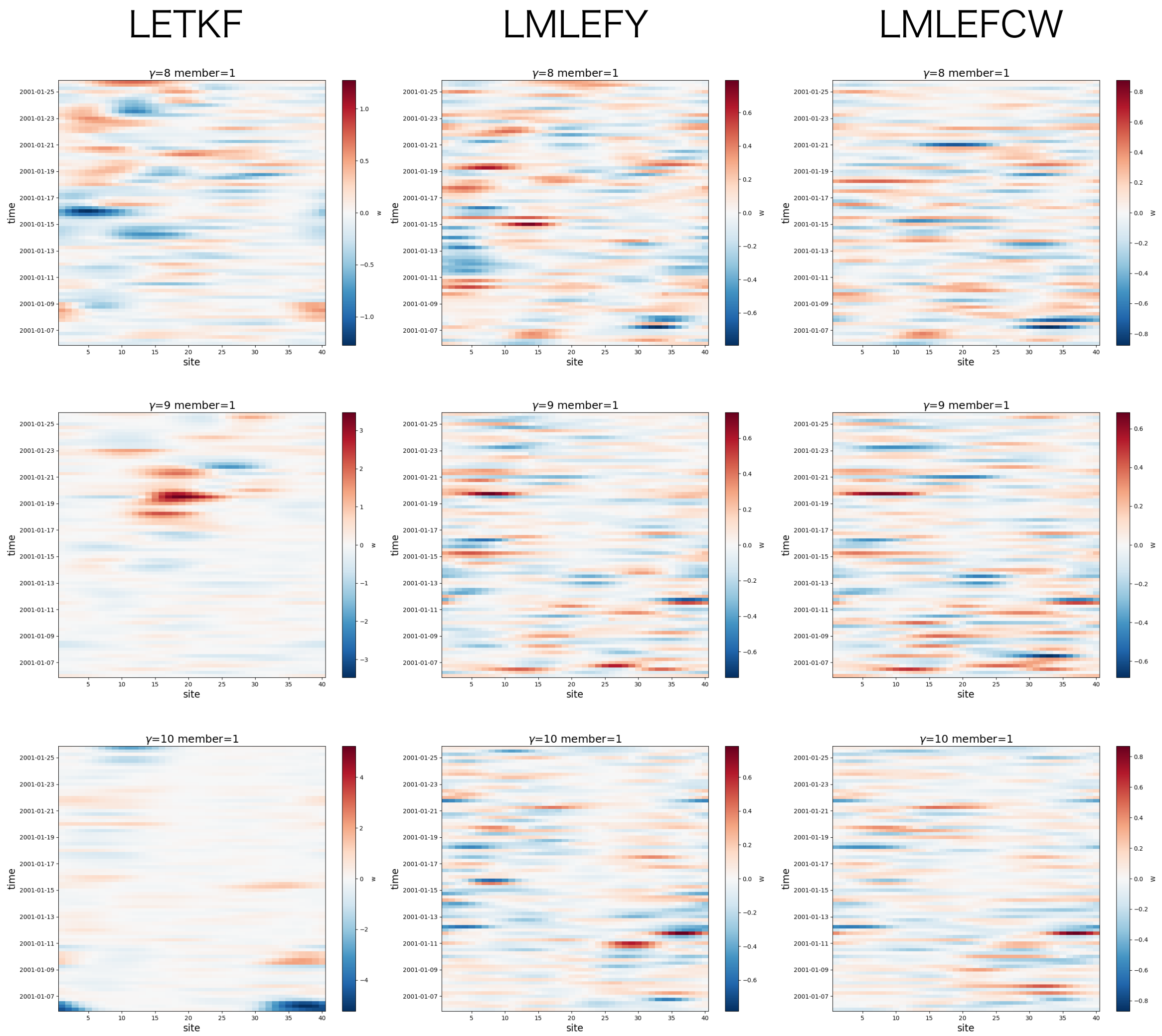

図 6.21: 図 6.19，6.20 と同様，ただし $\gamma = 8 \sim 10$ の実験

	逐次	2 プロセス	4 プロセス
LMLEFY	2773.82	1674.85 (60.4 %)	1395.44 (50.3 %)
LMLEFCW	15420.0	7612.9 (49.4 %)	4525.40 (25.3 %)

表 6.3: LMLEFY と LMLEFCW において解析部分でかかる時間．単位はミリ秒．$\gamma = 10$ の実験における結果を示す．括弧内の割合は逐次の場合からの高速化割合を示している．

前半の積算型観測同化実験では，先行研究と同様に，モデル空間局所化が観測空間局所化よりも高い解析精度を示していた．しかしモデル空間局所化における解析誤差共分散の推定精度は観測空間局所化に劣っており，これには解析アンサンブルの作成に用いる乱数の影響が出ていることが示唆される．乱数の影響を受けない解析アンサンブルの作成手法の導入が今後の課題である．また非線形観測を同化した場合は，同じ局所化手法間で比較して MLEF が ETKF を上回る精度を示しており，第 5 章の結果と同様に MLEF の非線形観測に対する解析精度の高さを示す結果となった．観測空間局所化に関して従来手法で

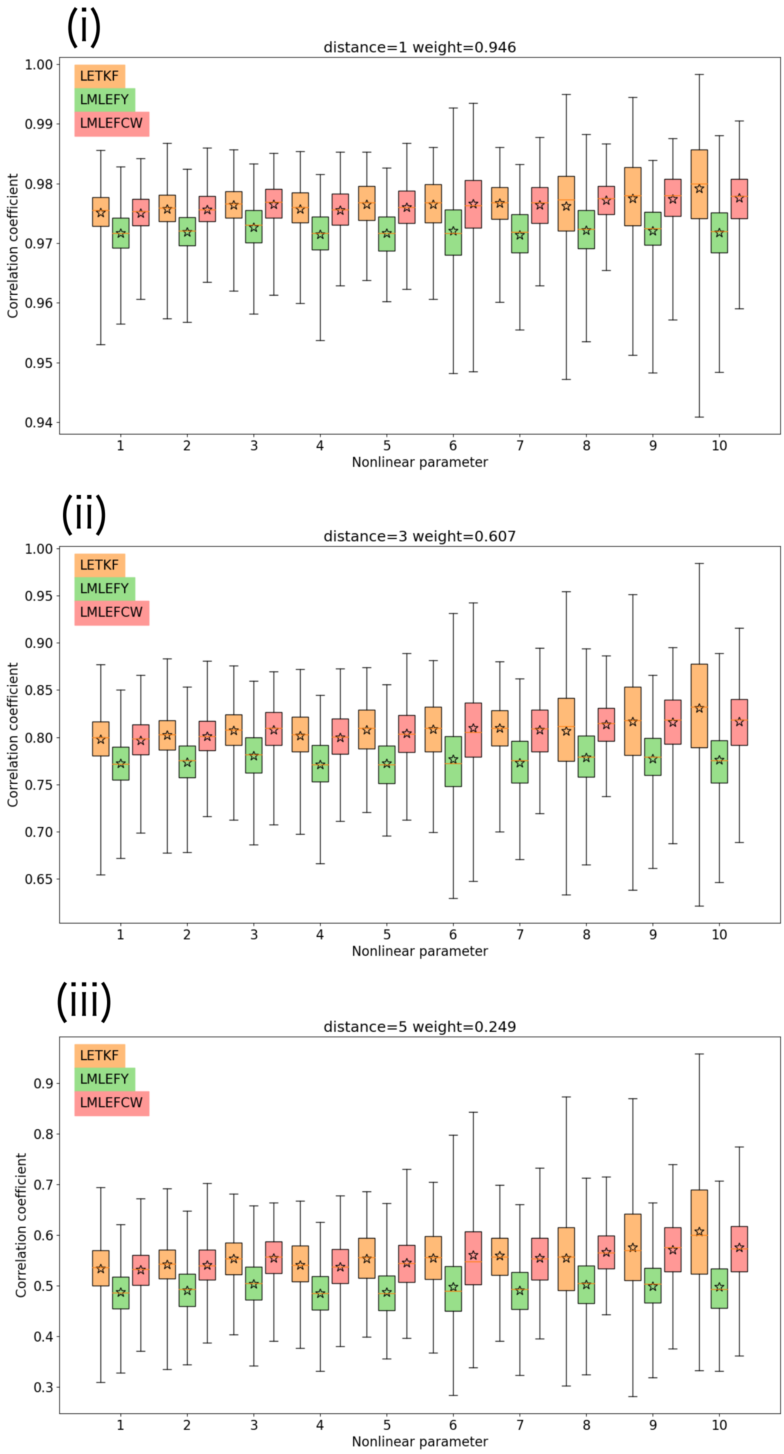

図 6.22: 結合係数間の相関係数の距離別統計．横軸は非線形性パラメタ γ の値，縦軸は相関係数の値を示す．箱ひげ図の見方は図 6.15 と同様．図の上の weight は解析格子と同位置にある観測と比較した観測の重みを示す．距離が (i) 1 格子，(ii) 3 格子，(iii) 5 格子離れた点同士の相関に対する統計を表す．

ある LETKF と今回導入した LMLEFY，LMLEFCW を比較すると，線形積算観測に対しては LMLEFY，非線形積算観測に対しては LMLEFCW が最も高い精度を示した．線形下での精度差を説明する要因ははっきりとは特定できていないが，LMLEFY の解析方法が LETKF や LMLEFCW よりも解析領域全体での評価に近いことが影響していると考えられる．また非線形観測に関して LMLEF が LETKF よりも高い精度を示すことは期待通りであった．

観測空間局所化手法間での違いをさらに調べるために，L96 モデルを用いたサイクル実験を行った．本実験で与えた最も強い非線形観測に対しても，LETKF，LMLEFY，LMLEFCW すべてが観測精度を上回る解析精度を示していた．しかし LETKF は非線形性が強くなるとともに解析誤差が大きくなり，かつ試行間のばらつきが大きくなるのに対して，LMLEF は強非線形に対しても安定した性能を示していた．本研究で考案した LMLEFCW は LMLEFY よりも高くかつ安定した性能を示しており，その差は弱非線形で有意であった．実際の精度差はかなり小さいが，LMLEFCW が置く結合係数への仮定が妥当であり，最適化の収束性が高いことが要因として挙げられる．結合係数の一様性の仮定は実際の空間分布および結合係数の統計解析からも精度良く成り立つことが確認できた．本研究で扱っている範囲の問題サイズでは LMLEFY に対する LMLEFCW の高速化は見られなかったが，解析部分において並列化による高速化の割合が高いことがわかった．このことは今後より高次元の問題に適用していくうえで，並列計算機とうまく組み合わせることで効率的なシステムを構築できる可能性を示している．

本章の実験の範囲では LMLEF の性能の高さのみが現れる結果となったが，LMLEF の応用には課題が残る．例えば後半のサイクル実験では最も高い精度を示すパラメタを探索して設定したが，LMLEF は LETKF よりもこれらのパラメタに対して大きな感度を示しており，適切なパラメタを設定しないと精度が大きく悪化することがわかっている．特に本研究で詳細に追究しなかった共分散膨張への感度が高く，共分散膨張の導入方法をより検討していく必要がある．また MLEF の性質上，予報誤差共分散の初期推定値への感度がアンサンブルカルマンフィルタよりも高く，適切な初期値を設定しないと解析初期に計算が破綻してしまうことがある．このような初期摂動の設定は問題依存ではあるが，アンサンブルの初期摂動の設定方法はデータ同化研究のトピックにもなっている (Wang et al., 2004; Zupanski et al., 2006) ため，今後さらに追究していく．

第 7 章

結論

本研究では熱帯・亜熱帯における大気循環の予測可能性に関して，アンサンブル手法を応用した熱帯低気圧進路の予測可能性に関する事例解析と，衛星観測のデータ同化で特徴的な非線形性と非局所性に焦点を当てたアンサンブルデータ同化手法間の比較研究を行った．

第 I 部ではアンサンブル予報データを用いて，2019 年台風第 19 号の進路の予測可能性を解析した．まず 4 つの主要予報センター間での上陸位置の精度比較から，気象庁が上陸 3 日前まで他センターに比べて精度良く上陸位置を予報できていたことが明らかとなった．この要因は，他の 3 センターが台風進行速度を過小評価していたのに対し，そのような傾向が気象庁には現れていないためであった．

しかし気象庁の予報における上陸位置は上陸の 3 日前に大きく西偏し，これに対応して上陸 2 日前に台風中心を北西に流す環境場の流れが明瞭に現れていた．この西偏の要因を特定するためにアンサンブル予報を用いた感度解析を行い，台風南東のリッジに感度があったことを示した．大気場の解析値との対応から，リッジが弱く予報されていたためにその南東で発達中であった低気圧性擾乱の西進が早まり，台風を西にずらしたことが示唆された．

次に感度解析で得られた結果を裏付けるために，気象庁の全球モデルを用いた再現実験と感度解析から得られた摂動に対する感度実験を行った．上陸位置の西偏がみられた前後の時刻を初期時刻とした再現実験は，進路の急変をよく再現していた．西偏がみられた時刻にリッジを強めた初期値を与えた予報実験では，予報前半の西偏傾向が弱まり上陸位置も実況値に近づいていた．初期値の摂動に対する応答は鉛直波長 17km の傾圧重力波に相当し，位相の西進が台風中心を東にずらす役割を果たしていたことがわかった．これらの数値実験から，アンサンブル感度解析が力学的な予報誤差要因を特定できることを確認することができた．

以上の事例解析の結果は，熱帯低気圧進路予報における亜熱帯環境場の重要性を示唆している．

熱帯低気圧進路の予測可能性に影響を与えるメカニズムを十分に理解し，予報精度を向上させるためには，解析値において熱帯・亜熱帯域が精度良く再現されていることが重要となる．しかし現在多くの研究で用いられている大気の再解析データは，熱帯・亜熱帯域の再現性に課題を持つことが知られている．面積の大半を海洋が占める熱帯・亜熱帯域においては衛星による観測が主な情報源となるため，再現性向上のためには解析値を作成するデータ同化システムにおいて衛星観測を適切に扱うことが重要となる．そこで第 II 部では，衛星観測同化に最適な同化手法の特定を目的として，アンサンブルデータ同化手法間で理想化実験を用いた性能比較を行った．

まず衛星観測の非線形性に着目して，1 次元移流拡散方程式を予報モデルとして非線形観測を与える理想化実験を行い，アンサンブルカルマンフィルタ（ETKF）と最尤法アンサンブルフィルタ（MLEF）の性能を比較し，予報変数を観測要素に変換する観測演算子の線形近似の影響を検証した．MLEF は変分法をベースとしたコスト関数最適化によって解析値を求めることで，非線形性が強くなるほど ETKF よりも高い性能を示した．ETKF ではアンサンブル平均に対して解析を行うため，観測摂動行列の構築方法によっては行列のランクが保存されず，不安定な解析インクリメントが生成されうることが明らかとなった．この問題はアンサンブルメンバーとは別のコントロールランに対して解析を行う MLEF では生じない．

観測演算子を線形近似した MLEF では最適化の収束性は向上するがコスト関数の極小値に到達してしまうため，強い非線形性に対しては線形近似を避けた定式化の MLEF に精度が劣ることがわかった．一方で，先行研究では観測演算子の線形近似を避けた定式化を用いることで不連続点を含むような演算子も扱うことができると主張されているが，線形近似なしの定式化は最適化の収束性が悪化するため，適切な最適化手法を選択しないと精度が上がらないことがわかった．今回の実験結果からは，どの手法も不連続な観測を同化する場合に十分な解析精度が得られなかった．観測演算子の不連続性は水の相変化を考慮する場合などに問題となるため，不連続性を適切に扱える同化手法の特定は今後の課題である．

次に，アンサンブル同化手法の課題であるサンプリング誤差の緩和のために用いられる局所化手法に焦点を当てた比較を行った．衛星観測は非線形であるだけでなく，鉛直積算された放射強度のように観測の「位置」が定義できない観測が含まれることも特徴の一つである．そのような観測位置が定義されない観測の同化に対して観測空間局所化は正常に機能しないことがあると多くの先行研究で指摘されている．一方で観測空間局所化でも衛星放射輝度を適切に同化できることを示す先行研究もあり，モデル空間局所化と観測空間局所化のどちらが衛星観測に適切しているか包括的な結論は得られていない．本研究では非線形観測同化性能の高い MLEF に両方の局所化手法を導入し，衛星による放射輝度観測を模した鉛直積算量を観測要素とする理想化同化実験においてその性能を調べた．

実験結果から，先行研究で指摘されているようにモデル空間局所化が観測空間局所化よりも高い性能を示すことがわかった．一方で解析誤差分布の推定精度は観測空間局所化に劣っており，モデル空間局所化のさらなる洗練が求められる．また積算型観測に非線形性を加えると，前述した実験同様 MLEF が ETKF よりも精度良く同化できることが明らかとなった．非線形積算観測に対する解析精度はモデル空間局所化の ETKF と観測空間局所化の ETKF で差がなく，積算量の扱いよりも非線形性の扱いの方が解析精度への影響が大きいことを示唆している．

アンサンブル同化では解析値をアンサンブルの線形結合で表すが，アンサンブルカルマンフィルタで行われる観測空間局所化では線形結合の係数を解析格子点ごとに独立なものとして扱う．しかし観測空間局所化で非線形演算子を正確に評価する場合，解析格子点を 1 点ずつ独立に扱うことはできなくなる．そのため先行研究では解析領域全体で定義したコスト関数の勾配を各格子点で評価する同化手法が考案されているが，並列化性能が下がるだけでなく最適化問題自体の収束性が悪化する．一方で各解析格子点で独立に結合係数を評価した場合でも，結合係数は空間的に滑らかに変化することが知られている．そこで本研究では解析格子点の周りで結合係数が一定であるという仮定を置くことで，最適化を格子点ごとに独立に評価しつつ非線形性を従来のアンサンブルカルマンフィルタよりも正確に評価する同化手法を考案した．考案手法と従来手法を前述の積算型観測同化実験および 1 次元の Lorenz モデルを用いたサイクル実験によって比較した．

積算型の非線形観測同化では，その精度は先行研究で述べられていた通りモデル空間局所化の MLEF には劣っていたが，モデル空間局所化の ETKF よりは高く，非線形積算に対する有効性を示していた．サイクル実験では強い非線形性に対して従来手法よりも精度が高く，さらに安定した性能を示すことがわかった．結合係数の空間分布および空間相関の解析から，考案手法が置くアンサンブルの結合係数が空間方向に滑らかに変化するという仮定が精度良く成り立つことも示された．このことは考案手法の妥当性を保証している．また並列化による効率的な実装に関しても有望な結果が得られた．一方で考案手法は共分散膨張や局所化半径などの各種パラメタや初期のアンサンブルに対する感度が従来手法よりも高く，安定した精度を保つためには問題ごとに適切な設定を与える必要がある．現実的な高次元問題への適用を進めていくうえで，考案手法の性質をより詳細に理解し，適切な設定を模索していくことが今後の課題である．

以上の結果は，MLEF が非線形性の扱いに適していることと，考案した局所化手法を用いることで現実的な高次元問題であっても MLEF を適用できる可能性を示している．すなわち考案手法をより現実的な高次元問題に適用し検証を進めていくことにより，熱帯・亜熱帯域の高精度な解析値を作成できる可能性があり，データ同化システムの改良や台風の予測精度向上に貢献することが期待できる．

本研究は，熱帯低気圧進路の予測可能性に対して新たなメカニズムを見出したとともに，予報精度向上のためのデータ同化手法の高度化に新たな知見をもたらすものである．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP19H05698，JP19H05605 及び JP21K03662 の助成を受けました．また本研究で用いた気象庁 GSM 及びその初期値は，気象庁情報基盤部と京都大学との共同研究「台風防災に資する気象庁全球スペクトルモデル GSM の改良に関する研究」の下，気象庁よりご提供いただきました．

本研究を進めるにあたり，指導教員である京都大学防災研究所 榎本 剛 教授には熱心なご指導と充実した研究環境を与えていただきました．興味がうつろいやすく研究テーマが頻繁に変わっていましたが，常に真摯に議論していただきました．またコロナ禍で対面での議論が難しい状況下ではありましたが，国内外の様々な会議に参加する機会をいただき，発表経験を積むことができました．特に本研究の核をなす最尤法アンサンブルフィルタの提唱者であるコロラド州立大学 Milija Zupanski 教授との議論の機会を設けていただき，本手法の実装に関して有益なコメントをいただけたことは本研究の重要なターニングポイントとなりました．心より感謝申し上げます。

副指導教員である京都大学防災研究所 吉田 聡 准教授，学部時代にご指導いただいた京都大学理学研究科 向川 均 教授，災害気候研究分野の井口 敬雄 助教には，セミナーや学会での発表の折に多くの助言をいただきました．また重 尚一 准教授をはじめとする物理気候学研究室の方々には学部時代から引き続き合同セミナーで大変お世話になりました．気象庁 GSM の移植及び実行にあたっては，気象庁の竹村 和人 氏，気象庁数値予報課の氏家 将志 氏と黒木 志浩 氏にご協力いただきました．この場を借りて御礼申し上げます．

災害気候研究分野の学生の皆様，秘書の西出 依子 さんと齊藤 陽子 さんには，日頃の研究生活で大変お世話になりました．ありがとうございました．

最後に，私の意思を尊重し心身ともに支え続けてくれた家族に深く感謝いたします．

参考文献

Ancell, B., and G. J. Hakim, 2007: Comparing adjoint- and ensemble-sensitivity analysis with applications to observation targeting. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 4117–4134.

Anderson, J. L., 2001: An ensemble adjustment Kalman filter for data assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 2884–2903.

Arakawa, A., and W. H. Schubert, 1974: Interaction of a cumulus cloud ensemble with the large-scale environment, Part I. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 674–701.

Asch, M., M. Bocquet, and M. Nodet, 2016: *Data Assimilation: Methods, Algorithms, and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 295 pp.

Bannister, R. N., 2008a: A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. I: Characteristics and measurements of forecast error covariances. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 1951–1970.

Bannister, R. N., 2008b: A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. II: Modelling the forecast error covariance statistics. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 1971–1996.

Barkmeijer, J., R. Buizza, and T. N. Palmer, 1999: 3d-var Hessian singular vectors and their potential use in the ECMWF ensemble prediction system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 2333–2351.

Bishop, C., and D. Hodyss, 2009: Ensemble covariances adaptively localized with ECO-RAP. Part 1: Tests on simple error models. *Tellus*, **61**, 84–96.

Bishop, C. H., B. J. Etherton, and S. J. Majumdar, 2001: Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter. Part I: Theoretical aspects. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 420–436.

Bishop, C. H., J. S. Whitaker, and L. Lei, 2017: Gain form of the ensemble transform Kalman filter and its relevance to satellite data assimilation with model space ensemble covariance localization. *Mon. Wea. Rev.*, **145**, 4575–4592.

Bowler, N. E., J. Flowerdew, and S. R. Pring, 2013: Tests of different flavours of EnKF on a simple model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **139**, 1505–1519.

Buehner, M., 2005: Ensemble-derived stationary and flow-dependent background-error covariances: Evaluation in a quasi-operational NWP setting. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 1013–1043.

Buizza, R., and T. N. Palmer, 1995: The singular-vector structure of the atmospheric global circulation. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1434–1456.

Burgers, J. M., 1948: A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, R. Von Mises and T. Von Kármán, Eds., Volume 1, Elsevier, 171–199.

Campbell, W. F., C. H. Bishop, and D. Hodyss, 2010: Vertical covariance localization for satellite radiances in ensemble Kalman filters. *Mon. Wea. Rev.*, **138**, 282–290.

Carr, L. E., and R. L. Elsberry, 1997: Models of tropical cyclone wind distribution and beta-effect propagation for application to tropical cyclone track forecasting. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 3190–3209.

Carr, L. E., and R. L. Elsberry, 2000: Dynamical tropical cyclone track forecast errors. Part I: Tropical region error sources. *Wea. Forecasting*, **15**, 641–661.

Carrassi, A., S. Vannitsem, D. Zupanski, and M. Zupanski, 2009: The maximum likelihood ensemble filter performances in chaotic systems. *Tellus*, **61**, 587–600.

Chan, J. C. L., and W. M. Gray, 1982: Tropical cyclone movement and surrounding flow relationships. *Mon. Wea. Rev.*, **110**, 1354–1374.

Courtier, P., J.-N. Thépaut, and A. Hollingsworth, 1994: A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **120**, 1367–1387.

Ehrendorfer, M., R. M. Errico, and K. D. Raeder, 1999: Singular-vector perturbation growth in a primitive equation model with moist physics. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1627–1648.

Enomoto, T., 2019: Influence of the track forecast of Typhoon Prapiroon on the heavy rainfall in western Japan in July 2018. *SOLA*, **15A**, 66–71.

Enomoto, T., S. Yamane, and W. Ohfuchi, 2015: Simple sensitivity analysis using ensemble forecasts. *J. Meteor. Soc. Japan*, **93**, 199–213.

Errico, R. M., P. Bauer, and J.-F. Mahfouf, 2007: Issues regarding the assimilation of cloud and precipitation data. *J. Atmos. Sci*, **64**, 3785–3798.

Fletcher, R., and C. M. Reeves, 1964: Function minimization by conjugate gradients. *Computer J.*, **7**, 149–154.

Gaspari, G., and S. E. Cohn, 1999: Construction of correlation functions in two and three dimensions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 723–757.

Gelaro, R., W. McCarty, M. J. Suárez, R. Todling, A. Molod, L. Takacs, C. A.

Randles, A. Darmenov, M. G. Bosilovich, R. Reichle, K. Wargan, L. Coy, R. Cullather, C. Draper, S. Akella, V. Buchard, A. Conaty, A. M. da Silva, W. Gu, G.-K. Kim, R. Koster, R. Lucchesi, D. Merkova, J. E. Nielsen, G. Partyka, S. Pawson, W. Putman, M. Rienecker, S. D. Schubert, M. Sienkiewicz, and B. Zhao, 2017: The modern-era retrospective analysis for research and applications, version 2 (MERRA-2). *J. Climate*, **30**, 5419–5454.

Gilbert, J. C., and J. Nocedal, 1992: Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization. *SIAM J. Optim.*, **2**, 21–42.

Golub, G. H., and C. F. Van Loan, 2013: *Matrix computations* (4 th Ed.). Johns Hopkins University Press, 756 pp.

Greybush, S. J., E. Kalnay, T. Miyoshi, K. Ide, and B. R. Hunt, 2011: Balance and ensemble Kalman filter localization techniques. *Mon. Wea. Rev.*, **139**, 511–522.

Hamill, T. M., C. Snyder, and J. S. Whitaker, 2003: Ensemble forecasts and the properties of flow-dependent analysis-error covariance singular vectors. *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 1741–1758.

Hamill, T. M., J. S. Whitaker, and C. Snyder, 2001: Distance-dependent filtering of background error covariance estimates in an ensemble Kalman filter. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 2776–2790.

Han, J., and H.-L. Pan, 2011: Revision of convection and vertical diffusion schemes in the NCEP global forecast system. *Wea. Forecasting*, **26**, 520–533.

Hansen, J. A., and L. A. Smith, 2000: The role of operational constraints in selecting supplementary observations. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 2859–2871.

Houtekamer, P. L., and H. L. Mitchell, 1998: Data assimilation using an ensemble Kalman filter technique. *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 796–811.

Houtekamer, P. L., and H. L. Mitchell, 2001: A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 123–137.

Hunt, B. R., E. J. Kostelich, and I. Szunyogh, 2007: Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: A local ensemble transform Kalman filter. *Physica D*, **230**, 112–126.

Iizuka, S., R. Kawamura, H. Nakamura, and T. Miyama, 2021: Influence of warm SST in the Oyashio region on rainfall distribution of Typhoon Hagibis (2019). *SOLA*, **17A**, 21–28.

Ito, K., and H. Ichikawa, 2021: Warm ocean accelerating tropical cyclone Hagibis (2019) through interaction with a mid-latitude westerly jet. *SOLA*, **17A**, 1–6.

Ito, K., and C.-C. Wu, 2013: Typhoon-position-oriented sensitivity analysis. Part I: Theory and verification. *J. Atmos. Sci.*, **70**, 2525–2546.

Ito, K., C.-C. Wu, K. T. F. Chan, R. Toumi, and C. Davis, 2020: Recent progress in the fundamental understanding of tropical cyclone motion. *J. Meteor. Soc. Japan*, **98**, 5–17.

Iwasaki, T., S. Yamada, and K. Tada, 1989: A parameterization scheme of orographic gravity wave drag with two different vertical partitionings. *J. Meteor. Soc. Japan*, **67**, 11–27.

Joseph, J. H., W. J. Wiscombe, and J. A. Weinman, 1976: The Delta-Eddington approximation for radiative flux transfer. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2452–2459.

Julier, S., and J. Uhlmann, 2004: Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, **92**, 401–422.

Katsube, K., and M. Inatsu, 2016: Response of tropical cyclone tracks to sea surface temperature in the Western North Pacific. *J. Climate*, **29**, 1955–1975.

Kawai, H., and T. Inoue, 2006: A simple parameterization scheme for subtropical marine stratocumulus. *SOLA*, **2**, 17–20.

気象庁, 2019: 数値予報課報告・別冊第 65 号　全球モデルの改良と展望.

Kotsuki, S., A. Pensoneault, A. Okazaki, and T. Miyoshi, 2020: Weight structure of the local ensemble transform Kalman filter: A case with an intermediate atmospheric general circulation model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **146**, 3399–3415.

Lawrence, A. R., M. Leutbecher, and T. N. Palmer, 2009: The characteristics of Hessian singular vectors using an advanced data assimilation scheme. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **135**, 1117–1132.

Le Dimet, F.-X., and O. Talagrand, 1986: Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical aspects. *Tellus*, **38**, 97–110.

Lei, L., and J. S. Whitaker, 2015: Model space localization is not always better than observation space localization for assimilation of satellite radiances. *Mon. Wea. Rev.*, **143**, 3948–3955.

Lei, L., J. S. Whitaker, J. L. Anderson, and Z. Tan, 2020: Adaptive localization for satellite radiance observations in an ensemble Kalman filter. *J. Adv. Mod. Earth Sys.*, **12**, e2019MS001693.

Lei, L., J. S. Whitaker, and C. Bishop, 2018: Improving assimilation of radiance observations by implementing model space localization in an ensemble Kalman filter. *J. Adv. Mod. Earth Sys.*, **10**, 3221–3232.

Lin, Y.-L., S.-H. Chen, and L. Liu, 2016: Orographic influence on basic flow and cyclone circulation and their impacts on track deflection of an idealized tropical cyclone. *J. Atmos. Sci.*, **73**, 3951–3974.

Liu, C., Q. Xiao, and B. Wang, 2008: An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part I: Technical formulation and preliminary test. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 3363–3373.

Liu, C., Q. Xiao, and B. Wang, 2009: An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part II: Observing system simulation experiments with Advanced Research WRF (ARW). *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 1687–1704.

Liu, D. C., and J. Nocedal, 1989: On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Math. Program.*, **45**, 503–528.

Lopez, P., 2007: Cloud and precipitation parameterizations in modeling and variational data assimilation: A review. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 3766–3784.

Lorenc, A. C., 2003: The potential of the ensemble Kalman filter for NWP—a comparison with 4D-Var. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **129**, 3183–3203.

Lorenz, E., 1995: Predictability: A problem partly solved. In *Seminar on Predictability, 4-8 September 1995*, Volume 1, ECMWF, ECMWF, Shinfield Park, Reading, 1–18.

Lorenz, E. N., and K. A. Emanuel, 1998: Optimal sites for supplementary weather observations: Simulation with a small model. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 399–414.

Malakar, P., A. P. Kesarkar, J. N. Bhate, V. Singh, and A. Deshamukhya, 2020: Comparison of reanalysis data sets to comprehend the evolution of tropical cyclones over North Indian Ocean. *Earth Space Sci.*, **7**, e2019EA000978.

Mellor, G. L., and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791–1806.

Mellor, G. L., and T. Yamada, 1982: Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys.*, **20**, 851–875.

Miyachi, T., and T. Enomoto, 2021: Tropical cyclone track forecasts using NCEP-GFS with initial conditions from three analyses. *SOLA*, **17**, 140–144.

Miyoshi, T., and S. Yamane, 2007: Local ensemble transform Kalman filtering with an AGCM at a T159/L48 resolution. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 3841–3861.

Moré, J. J., and D. J. Thuente, 1994: Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease. *ACM Trans. Math. Softw.*, **20**, 286–307.

Murakami, H., 2014: Tropical cyclones in reanalysis data sets. *Geophys. Res. Lett.*, **41**, 2133–2141.

内閣府, 2020: 令和 2 年版　防災白書.

Nakashita, S., and T. Enomoto, 2021: Factors for an abrupt increase in track forecast error of Typhoon Hagibis (2019). *SOLA*, **17A**, 33–37.

Navon, I. M., and D. M. Legler, 1987: Conjugate-gradient methods for large-scale minimization in meteorology. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 1479–1502.

Nocedal, J., and S. J. Wright, 2006: *Numerical Optimization* (Second Ed.). Springer, New York, NY, 664 pp.

Ott, E., B. R. Hunt, I. Szunyogh, A. V. Zimin, E. J. Kostelich, M. Corazza, E. Kalnay, D. J. Patil, and J. A. Yorke, 2004: A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation. *Tellus*, **56**, 415–428.

Patil, D. J., B. R. Hunt, E. Kalnay, J. A. Yorke, and E. Ott, 2001: Local low dimensionality of atmospheric dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5878–5881.

Rodgers, C. D., 1976: Retrieval of atmospheric temperature and composition from remote measurements of thermal radiation. *Rev. Geophys.*, **14**, 609–624.

Rodgers, C. D., 2000: *Inverse Methods for Atmospheric Sounding: Theory and Practice.* WORLD SCIENTIFIC, 256 pp.

Rossby, C. G., 1948: On displacement and intensity changes of atmospheric vortices. *J. Marine. Res.*, **7**, 175–187.

Sato, N., P. J. Sellers, D. A. Randall, E. K. Schneider, J. Shukla, J. L. Kinter, Y.-T. Hou, and E. Albertazzi, 1989a: Effects of implementing the simple biosphere model in a general circulation model. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 2757–2782.

Sato, N., P. J. Sellers, D. A. Randall, E. K. Schneider, J. Shukla, J. L. Kinter, Y.-T. Hou, and E. Albertazzi, 1989b: Implementing the simple biosphere model (SiB) in a general circulation model: Methodologies and results. Technical Report NASA-CR-185509, NASA.

Scinocca, J. F., 2003: An accurate spectral nonorographic gravity wave drag parameterization for general circulation models. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 667–682.

Sellers, P. J., Y. Mintz, Y. C. Sud, and A. Dalcher, 1986: A simple biosphere model (SiB) for use within general circulation models. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 505–531.

Smith, R. N. B., 1990: A scheme for predicting layer clouds and their water content in a general circulation model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **116**, 435–460.

Talagrand, O., and P. Courtier, 1987: Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I: Theory. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **113**, 1311–1328.

Torn, R. D., T. J. Elless, P. P. Papin, and C. A. Davis, 2018: Tropical cyclone track sensitivity in deformation steering flow. *Mon. Wea. Rev.*, **146**, 3183–3201.

Tsuyuki, T., 1997: Variational data assimilation in the tropics using precipitation data. Part III: Assimilation of SSM/I precipitation rates. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 1447–1464.

Velden, C. S., and L. M. Leslie, 1991: The basic relationship between tropical cyclone intensity and the depth of the environmental steering layer in the Australian region. *Wea. Forecasting*, **6**, 244–253.

Virtanen, P., R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, İ. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, and P. van Mulbregt, 2020: SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, **17**, 261–272.

Wang, X., C. H. Bishop, and S. J. Julier, 2004: Which is better, an ensemble of positive–negative pairs or a centered spherical simplex ensemble? *Mon. Wea. Rev.*, **132**, 1590–1605.

Whitaker, J. S., and T. M. Hamill, 2002: Ensemble data assimilation without perturbed observations. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 1913–1924.

Wu, L., and B. Wang, 2001: Movement and vertical coupling of adiabatic baroclinic tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 1801–1814.

Wu, T.-C., M. Zupanski, L. D. Grasso, C. D. Kummerow, and S.-A. Boukabara, 2019: All-sky radiance assimilation of ATMS in HWRF: A demonstration study. *Mon. Wea. Rev.*, **147**, 85–106.

Yabu, S., 2013: Development of longwave radiation scheme with consideration of scattering by clouds in JMA global model. *CAS/JSC WGNE Res.Activ.Atmos.Oceanic.Modell*, **43**, 4.07–4.08.

Yamaguchi, M., T. Nakazawa, and K. Aonashi, 2012: Tropical cyclone track forecasts using JMA model with ECMWF and JMA initial conditions. *Geophys. Res. Lett.*, **39**.

Yang, S.-C., E. Kalnay, B. Hunt, and N. E. Bowler, 2009: Weight interpolation for efficient data assimilation with the local ensemble transform Kalman filter. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **135**, 251–262.

Ying, Y., and F. Zhang, 2018: Potentials in improving predictability of multiscale tropical weather systems evaluated through ensemble assimilation of simulated satellite-based observations. *J. Atmos. Sci.*, **75**, 1675–1698.

Yokota, S., M. Kunii, K. Aonashi, and S. Origuchi, 2016: Comparison between four-dimensional LETKF and ensemble-based variational data assimilation with observation localization. *SOLA*, **12**, 80–85.

Yukimoto, S., H. Yoshimura, M. Hosaka, T. Sakami, H. Tsujino, M. Hirabara, T. Y. Tanaka, M. Deushi, A. Obata, H. Nakano, Y. Adachi, E. Shindo, S. Yabu, T. Ose, and A. Kitoh, 2011: Meteorological research institute-earth system model version 1 (MRI-ESM1) -model description-. Technical report, Meteorological Research Institute.

Zhang, F., C. Snyder, and J. Sun, 2004: Impacts of initial estimate and observation availability on convective-scale data assimilation with an ensemble Kalman filter. *Mon. Wea. Rev.*, **132**, 1238–1253.

Zhang, S., X. Zou, J. Ahlquist, I. M. Navon, and J. G. Sela, 2000: Use of differentiable and nondifferentiable optimization algorithms for variational data assimilation with discontinuous cost functions. *Mon. Wea. Rev.*, **128**, 4031–4044.

Županski, D., and F. Mesinger, 1995: Four-dimensional variational assimilation of precipitation data. *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 1112–1127.

Zupanski, M., 2005: Maximum likelihood ensemble filter: Theoretical aspects. *Mon. Wea. Rev.*, **133**, 1710–1726.

Zupanski, M., 2021: The maximum likelihood ensemble filter with state space localization. *Mon. Wea. Rev.*, **149**, 3505–3524.

Zupanski, M., S. J. Fletcher, I. M. Navon, B. Uzunoglu, R. P. Heikes, D. A. Randall, T. D. Ringler, and D. Daescu, 2006: Initiation of ensemble data assimilation. *Tellus*, **58**, 159–170.

Zupanski, M., I. M. Navon, and D. Zupanski, 2008: The maximum likelihood ensemble filter as a non-differentiable minimization algorithm. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 1039–1050.

Appendix

A 熱帯低気圧進路の解析手法

付録として，熱帯低気圧進路の解析手順の詳細について記す．

A.1 中心位置のトラッキング

本節では中心位置のトラッキングアルゴリズムの詳細について述べる．

格子点上の海面気圧極小位置は Python の Scipy モジュール (Virtanen et al., 2020) の極小値を見つける関数（`ndimage.filters.minimum_filter`）を用いて取り出す．予報値の台風中心はベストトラック周辺に位置すると考えて，取り出された極小値の中から，ベストトラックの中心位置に最も近い極小値を大円距離

$$d = r_{\mathrm{earth}} \cos^{-1}[\sin\varphi_b \sin\varphi + \cos\varphi_b \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_b)] \tag{A.1}$$

を計算して求める．ここで $r_{\mathrm{earth}} = 6.371 \times 10^6 \mathrm{m}$ は地球半径，(λ_b, φ_b)，(λ, φ) はそれぞれベストトラックの中心と極小位置の経度，緯度を表す．式 (A.1) の d が最小となる位置の座標を $\mathbf{r}_0 = (\lambda_0, \varphi_0)$ とする．

次に，海面気圧 f が $\mathbf{r}_0$ の近傍で緯度経度に関する関数で与えられると仮定する．

$$\begin{aligned} f(\lambda, \varphi) = & c_0 + c_1\Delta\lambda + c_2\Delta\varphi \\ & + c_3\Delta\lambda\Delta\varphi + c_4\Delta\lambda^2 + c_5\Delta\varphi^2 \\ & + c_6\Delta\lambda^2\Delta\varphi + c_7\Delta\lambda\Delta\varphi^2 + c_8\Delta\lambda^2\Delta\varphi^2 \\ \Delta\lambda = & \lambda - \lambda_0,\ \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$\mathbf{r}_0$ と $\mathbf{r}_0$ に隣接する 8 点の計 9 点における f の値から係数を計算する．

$$
\begin{aligned}
f_{i,j} &= f(\lambda_0 + i\Delta\lambda, \varphi_0 + j\Delta\varphi) \quad (i,j = -1,0,1) \\
c_0 &= f_{0,0} \\
c_1 &= \frac{f_{1,0} - f_{-1,0}}{2\Delta\lambda} \\
c_2 &= \frac{f_{0,1} - f_{0,-1}}{2\Delta\varphi} \\
c_3 &= \frac{f_{1,1} - f_{1,-1} - f_{-1,1} + f_{-1,-1}}{4\Delta\lambda\Delta\varphi} \\
c_4 &= \frac{f_{1,0} + f_{-1,0} - 2f_{0,0}}{2\Delta\lambda^2} \\
c_5 &= \frac{f_{0,1} + f_{0,-1} - 2f_{0,0}}{2\Delta\varphi^2} \\
c_6 &= \frac{f_{1,1} - f_{1,-1} + f_{-1,1} - f_{-1,-1} - 2f_{0,1} + 2f_{0,-1}}{4\Delta\lambda^2\Delta\varphi} \\
c_7 &= \frac{f_{1,1} + f_{1,-1} - f_{-1,1} - f_{-1,-1} - 2f_{1,0} + 2f_{-1,0}}{4\Delta\lambda\Delta\varphi^2} \\
c_8 &= \frac{f_{1,1} + f_{1,-1} + f_{-1,1} + f_{-1,-1} - 2f_{1,0} - 2f_{-1,0} - 2f_{0,1} - 2f_{0,-1} + 4f_{0,0}}{4\Delta\lambda^2\Delta\varphi^2}
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

ここで，関数 f の極小点は $\mathbf{r}_0$ に十分近いとし，極小点を含む近傍では f を 2 次関数で近似できるとする．$\mathbf{r}_0$ の周りでの 2 次までのテイラー展開

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}_0) - \mathbf{b}^T\delta\mathbf{r} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{r}^T\mathbf{A}\mathbf{r} \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} f_{\lambda\lambda} & f_{\lambda\varphi} \\ f_{\lambda\varphi} & f_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = -\begin{bmatrix} f_\lambda \\ f_\varphi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

において，f が極小となるための条件は,

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\delta\mathbf{r} = \mathbf{b} \tag{A.5}$$

と表すことができる．式 (A.2) との対応から,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2c_4 & c_3 \\ c_3 & 2c_5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = -\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

となるので，式 (A.5) を解いて極小位置を求め，式 (A.2) から中心気圧を求めることができる．トラッキングは中心気圧が 1010 hPa を超えるか，中心位置が北緯 40 度以北に達した場合に終了する．

A.2　鉛直平均風の計算

850–300 hPa の鉛直重みつき平均風は 850，500，300 hPa の風データを用いて以下のように計算する．

1. 850–300 hPa までの層を 3 分割（850–700 hPa, 700–500 hPa, 500–300 hPa）する．
2. 各層の中間（775 hPa，600 hPa，400 hPa）での風を上下層の線形内挿で求める．

$$
\begin{aligned}
u_{775} &= \frac{775-500}{850-500}u_{850} + \frac{850-775}{850-500}u_{500} = \frac{11}{14}u_{850} + \frac{3}{14}u_{500} \\
u_{600} &= \frac{600-500}{850-500}u_{850} + \frac{850-600}{850-500}u_{500} = \frac{2}{7}u_{850} + \frac{5}{7}u_{500} \\
u_{400} &= \frac{500-400}{500-300}u_{500} + \frac{400-300}{500-300}u_{300} = \frac{1}{2}u_{500} + \frac{1}{2}u_{300}
\end{aligned}
$$

3. 各層の層厚を重みとして平均する．

$$
\begin{aligned}
u_{850-300} &= \frac{150}{550}u_{775} + \frac{200}{550}u_{600} + \frac{200}{550}u_{400} \\
&= \frac{7}{22}u_{850} + \frac{1}{2}u_{500} + \frac{2}{11}u_{300}
\end{aligned}
$$

A.3 台風中心極座標への変換

本節では台風中心を北極とするような座標回転の計算法について述べる．
海面気圧のようなスカラー変数に対する座標回転の手順は以下の通りである．

1. 台風中心から半径約 1800km（緯度 16 度分）の領域を回転させるために，北極から 0.5 度ごとに北緯 74 度まで等緯度等経度格子（北極座標系）を設定する．
2. 北極座標系を北極と台風中心が一致するように回転させる．
3. 回転した座標の位置に値を双線型内挿する．

上記 2 においては，まず北極座標系の格子点 (λ, φ) をデカルト座標系の位置ベクトル (x, y, z) に変換する．

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\lambda\sin\theta \\
y &= \sin\lambda\sin\theta \\
z &= \cos\theta
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

ここで $\theta = \pi/2 - \varphi$ は余緯度を表す．この位置ベクトルを北極が台風中心 $(\lambda_c, \theta_c) = (\lambda_c, \pi/2 - \varphi_c)$ と一致するように回転させる行列は以下で与えられる．

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_c\cos\theta_c & -\sin\lambda_c & \cos\lambda_c\sin\theta_c \\ \sin\lambda_c\cos\theta_c & \cos\lambda_c & \sin\lambda_c\sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & 0 & \cos\theta_c \end{pmatrix} \tag{A.8}
$$

上記の行列を作用させて回転した位置ベクトル (x', y', z') を緯度経度座標に戻して内挿先の格子点を得る．

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \tan^{-1}(y'/x') \\
\varphi &= \sin^{-1} z'
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

風速に対する座標回転の手順は基底の回転を考慮する必要があるため，以下のようになる．

1. スカラー変数と同様に回転させた座標を用意する．
2. 風速ベクトルをデカルト座標系で表現し，各成分を回転させた座標に内挿する．
3. 内挿後の成分を回転行列の転置行列を用いて回転させる．
4. デカルト座標から緯度経度座標の風速成分に戻す．

緯度経度座標での風速成分 (u, v) からデカルト座標での風速成分 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ への変換，逆変換はそれぞれ以下のように計算される．

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -u \sin\lambda - v \cos\lambda \cos\theta \\
\dot{y} &= u \cos\lambda - v \sin\lambda \cos\theta \\
\dot{z} &= v \sin\theta
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
u &= -\dot{x} \sin\lambda + \dot{y} \cos\lambda \\
v &= -\dot{x} \cos\theta \cos\lambda - \dot{y} \cos\theta \sin\lambda + \dot{z} \sin\theta
\end{aligned} \tag{A.11}$$

B　感度解析摂動を加えた初期値の作成手法

感度解析摂動は全球（0.5 度の等緯度等経度格子）で計算しているが，初期値に加える摂動は最も大きな感度の周囲のみに制限する．今回与える摂動は感度解析第一モードのみの主成分得点によるアンサンブル初期摂動の線形結合から作成しているため，摂動の振幅調整は特に行わない．また地表気圧以外の摂動は 3 つの気圧面（850, 500, 300 hPa）で計算しているため，GSM のモデル面に鉛直内挿して加える．摂動付与により地表気圧が変化することでモデル面が変わるため，摂動を加える要素（気温，東西風，南北風，比湿）以外の 3 次元要素（雲水量，雲量）にも修正を加える．初期値作成の手順を以下に示す．

1. 摂動エネルギーが極大を示す格子点を特定し，その点を中心としてフィルターをかける．
2. 等緯度等経度格子から GSM の適合ガウス格子に二重線形内挿する．
3. 初期値の地表気圧に摂動の地表気圧を加える．
4. 変更後の地表気圧を用いてモデル面の気圧を計算する．
5. 気圧面上の摂動を変更後のモデル面に気圧の自然対数を用いて鉛直内挿または外挿する．
6. 初期値を変更後のモデル面に鉛直内挿する．摂動と対応する変数（東西・南北風，気温，比湿）には摂動を加える．摂動を加えて比湿が負になった場合は 0 に修正する．

以下，各手順の詳細について記す．

摂動の振幅を落とすフィルターには Gaspari and Cohn (1999) の 5 次関数 (4.84) を用いた．エネルギー極大点から半径緯度 30 度分（約 3300 km）離れた領域で摂動の振幅が 0 となるように $c = r_{\mathrm{earth}} \cos(15°)$ と設定し，摂動の振幅を落としながら周囲の場と滑らかにつながるようにした．

GSM の鉛直座標は地表気圧 p_{s} に依存するため，地表気圧に摂動を加えた後以下の式でハーフレベルとフルレベルの気圧を再計算する．

$$p_{\mathrm{h}}(\eta_k) = A(\eta_k) + B(\eta_k)p_{\mathrm{s}} \tag{B.1}$$

$$p_{\mathrm{f}}(\eta_k) = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{p_{\mathrm{h}}(\eta_k)\log(p_{\mathrm{h}}(\eta_k)) - p_{\mathrm{h}}(\eta_{k+1})\log(p_{\mathrm{h}}(\eta_{k+1}))}{p_{\mathrm{h}}(\eta_k) - p_{\mathrm{h}}(\eta_{k+1})} - 1\right] & (k < 100) \\ 0.5p_{\mathrm{h}}(\eta_k) & (k = 100) \end{cases} \tag{B.2}$$

A, B はモデル面計算に必要な定数である．

気圧面の摂動はモデル面フルレベルの気圧の自然対数を利用して線形内挿または外挿する．モデル面が 850 hPa より下層の場合（$p_{\mathrm{f}}(\eta_k) > 850$ hPa），

$$v_{\mathrm{prtb}}(\eta_k) = \frac{\log(p_{\mathrm{s}}) - \log(p_{\mathrm{f}})}{\log(p_{\mathrm{s}}) - \log(850\ \mathrm{hPa})} v_{\mathrm{prtb}}(850\ \mathrm{hPa}) \tag{B.3}$$

モデル面が 300 hPa より上層の場合（$p_{\mathrm{f}}(\eta_k) < 300$ hPa），

$$v_{\mathrm{prtb}}(\eta_k) = \frac{\log(p_{\mathrm{f}})}{\log(300\ \mathrm{hPa}) - \log(p_{\mathrm{s}})} v_{\mathrm{prtb}}(300\ \mathrm{hPa}) \tag{B.4}$$

モデル面が 850 hPa と 300 hPa の間に位置する場合（$300\ \mathrm{hPa} < p_{\mathrm{f}}(\eta_k) < 850$ hPa），

$$v_{\mathrm{prtb}}(\eta_k) = \frac{\log(p_1) - \log(p_{\mathrm{f}})}{\log(p_1) - \log(p_2)} v_{\mathrm{prtb}}(p_2) + \frac{\log(p_{\mathrm{f}}) - \log(p_2)}{\log(p_1) - \log(p_2)} v_{\mathrm{prtb}}(p_1) \tag{B.5}$$

ただし p_1, p_2 は 850 hPa, 500 hPa, 300 hPa のうちそれぞれ p_{f} の最近接下層と最近接上層を表す．

最終的な初期値の鉛直内挿は，変更前のモデル面フルレベルの気圧と変更後のモデル面フルレベルの気圧を用いて，上記と同様の線形内挿によって行う．