

令和2年度 修士論文

動径基底関数を用いた
球面上の移流モデルに対する
決定論的な局所細密化

京都大学大学院 理学研究科 地球惑星科学専攻

小笠原 宏司

要旨

本研究では先行研究が示した動径基底関数(RBF)手法の精度検証を行い、これを用いた移流モデルに対して決定論的な局所細密化を適用した。先行研究では局所細密化に数値的最適化を用いており、現業数値天気予報モデルで使われているような百万点を超える節点に適用することには不向きである。そこで本研究では、より多くの節点を用いることを目的として決定論的な局所細密化を適用した。

決定論的な局所細密化手法には、Schmidt 変換を用いた。性能を検証するために先行研究と同じテストケースである両極にある静止した渦の巻き上げ実験を行った。この実験ではトレーサが角速度で定義される風によって移流され、巻き上げられていく。テストケースを扱うために Schmidt 変換の拡大率に変更を加え、両極に点を集中させる工夫を施した。また解像度が疎になっていく領域で生じる可能性がある Runge 現象を抑制するために RBF の形状を決めるパラメータ ε に対して、マップファクターに基づいた緯度依存性を持たせた。

まず先行研究と同じ節点の配置及び数、時間刻み幅、 ε の最小値を用いた実験で誤差を比較し、同等の精度が得られることを確認した。次に節点配置を決定論的に計算できる逡減格子に置き換え、先行研究のおよそ 5 倍にあたる 21056 点の節点を用いて実験を行ったところ、準一様な節点配置を用いた場合と比較して局所細密化節点を用いた場合は正規化二乗平均平方根誤差が $1/7$ に低減した。次に誤差の収束性を検証するために節点数を変化させて、それぞれの節点数における最適な ε を用いて実験を行ったところ、およそ 4 次の代数的収束であった。さらに安定性を検証するために固有値解析を行った。固有値が安定して計算できる 3078 点の逡減格子における準一様な節点配置と局所細密化節点の固有値を比較したところ、局所細密化により数値的不安定を引き起こす正の実部が減少することが分かった。また、時間刻み幅を縮めると安定領域内にあった固有値が安定領域外に出るため時間刻み幅には下限があることが示唆された。固有値解析の結果は、長期（通常誤差を比較する時間の 20 倍）積分で確認することができた。短期積分で求めた最適な ε とルンゲ・クッタの安定領域から求められる時間刻み幅を用いれば 21056 点の細密化節点においても数値的不安定は生じなかったことから、固有値解析の結果は節点数を増やした場合にも適用可能であることが示唆された。

以上の数値実験の結果は、RBF を用いた移流モデルに対して決定論的な局所細密化節点を用いた場合、準一様な節点配置を用いる場合より誤差が減少し、より安定であることが示している。また、既存の数値的最適化による局所細密化を決定論的な手法に置き換えることができることを示している。

目次

第1章 序論

1.1 はじめに

1.2 一様性の高い節点配置

- ・ 最小エネルギー節点
- ・ 遞減格子
- ・ Hammersly 節点

1.3 動径基底関数

- ・ 有限回微分可能な RBF
- ・ 無限回微分可能な RBF

1.4 RBF 法

1.4.1 RBF を用いた内挿

1.4.2 RBF を用いた境界値問題の解法

1.4.3 RBF を用いた球面上の移流モデル

1.4.4 数値的最適化を用いた局所細密化節点における RBF 移流モデル

1.5 研究目的

- ・ RBF 法の精度検証
- ・ 数値的最適化による局所細密化から決定論的な局所細密化へ

第2章 RBF を用いた数値手法

2.1 内挿の手法

2.2 境界値問題の解法

2.3 RBF 法を用いた移流モデル

2.4 局所細密化節点と RBF 移流モデル

- ・ 決定論的な局所細密化
- ・ 局所細密化節点に対する形状パラメーター

第3章 実験結果

3.1 RBF の精度検証

3.1.1 内挿問題

3.1.2 境界値問題

3.2 球面上の移流

3.2.1 剛体回転

3.2.2 両極にある静止した渦の巻き上げ

3.2.3 固有値解析

3.3 移流モデルの局所細密化

3.3.1 局所細密化節点に対する形状パラメーターの検証

3.3.2 局所細密化最小エネルギー節点を用いた渦の巻き上げ

3.3.3 局所細密化逡減格子に対する固有値解析

3.3.4 局所細密化逡減格子を用いた渦の巻き上げ

第4章 まとめ

第1章 序論

1.1 はじめに

数値流体力学は現代の暮らしに欠かせないものとなっている。エアコンの空気の流れから飛行機の設計さらには明日の天気予報にまで数値流体力学が利用されている。流体力学現象の中で、重要な過程として移流がある。移流は流れに乗って物質などが流入出していく現象であり、移流項はほとんどの流体運動の計算に登場する。具体的には、地球温暖化の原因の一つである二酸化炭素 (CO_2) の発生源や CO_2 の行方を計算する際には移流項の計算が大きな割合を占めている。また日常の生活に関わる気温変化にも移流は大きな役割を担っている。もちろん気温は放射現象によっても変化するが、暖かい(冷たい)空気の移流は観測地点の気温を変える大きな要因になる。以上のことから流体の将来の状態の予報や流体の引き起こす現象を理解するためには移流の計算精度は重要である。

流体の将来の状態を求める際には偏微分方程式を計算機に解かせることが主流である。偏微分方程式の数値的な解法において主に使われている手法では、空間微分に関わる項を差分法や関数を使った展開で近似し、偏微分方程式を常微分方程式に変換し、時間積分を行うことで計算する。空間微分に関わる項の近似の手法は様々な手法が開発されており、計算に用いる点(格子点など)が一様な配置が可能な場合には十分な精度の計算が可能である。

しかし、小さなスケールの現象を再現するために領域全体に一様に点を配置すると、必要な点の数が多くなる。そこで全体的に点を増やすのではなく、点の配置を流体の運動に合わせて動的に配置を変化させる手法(適合格子)や注目する一部の領域を高解像度化する手法(局所細密化)などが使われている。適合格子や局所細密化では点の配置が一様でなくなるので、非一様な点の配置でも高精度な計算が可能な手法を使用する必要がある。そこで本研究では動径基底関数(Radial Basis Functions, RBF)を使用する。

RBFは「多次元において散在する点から適切に曲面を再現することは可能か?」という疑問(Hardy 1971)から研究が始まった関数であり、現在では機械学習の分野や偏微分方程式の解法にも用いられている。メッシュレスな手法であるRBFを用いた補間や偏微分方程式の解法(Kansa 1990)は高精度であることが先行研究によって確認されている。球面上の双曲線型偏微分方程式の解法の分野では、移流モデル(Flyer and Wright 2007)や浅水波方程式モデル(Flyer and Wright 2009)などが定式化され、高解像度モデルの研究(Tillenius et al. 2015)も行われている。

本論文の構成は以下のとおりである。第1章では準一様な節点配置、RBF及びそれを用いた計算手法の性質について先行研究のレビューを行う。第2章ではRBFを用いた計算手法について述べる。第3章でRBFの精度の検証と決定論的な局所細密化節点を用いた移流モデルの実験の結果を示す。第4章でまとめを行う。

1.2 一様性の高い節点配置の作成方法

球面において一様に点を置くことができるのは 20 点（正 12 面体の頂点）が最高であることが知られている。よって 21 点以上の点を均等に置くことはできず、それ以上の点をできるだけ一様に領域内に点を置いたものは準一様な節点配置と呼ばれている。準一様な節点配置は決定論的な方法と反復法どちらでも作成される。本章では準一様な節点配置の作成方法を 3 つ述べる。

1.2.1 最小エネルギー節点 (Minimum Energy Nodes, ME)

ME 節点は反復法によって生成される。ME 節点は球面上にある点の配置から式(1.1) によって定義される最小エネルギー(Rakhmanov et al. 1994)を計算し、 E_{\min} が最小となる節点配置を求める。

$$E_{\min} = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \|x_i - x_j\|^\alpha, & \alpha \neq 0 \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \log \frac{1}{\|x_i - x_j\|}, & \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

α は実数である。

本研究で用いる最小エネルギーは $\alpha = -1$ であり、この設定の最小エネルギーを求めることは Thomson 問題として知られている。ME 節点は始めに単位球上に束縛され、散在する電荷が斥力によって移動し、一定時間後に平衡状態になった電荷の位置を求めることで計算できる。平衡状態となった節点配置は数値的最適化を用いて求める。節点数 1849 の ME 節点を図 1.1 に示す。

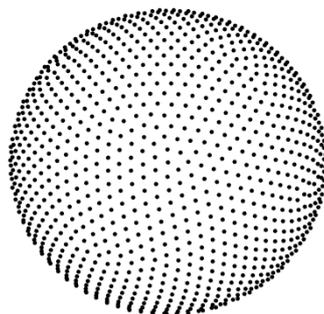


図 1.1 ME 節点

北半球の ME 節点。節点数は 1849 点。

Wright (2018)

1.2.2 逡減格子

逡減格子は極に近づくとつれて緯度円上の点を減らす節点配置である (Kurihara 1965)。スペクトルモデルに用いるために提案された逡減格子(Fully Reduced Grid 以降 FRG, Hortal and Simmons 1991)は (図 1.2)は以下のような手順で生成される。まず子午線方向の解像度を決め、ガウス緯度 Φ を作成する。次に子午線方向の解像度と等しくなるように赤道に最も近い緯度の緯度円上の節点数 N_{\max} を決める。次に高速フーリエ変換に都合の良い点の数である 2, 3, 5 の公倍数 $M_i \leq N_{\max}$ を求める。次に低緯度から高緯度に向かって $\phi > \phi_i$ に初めてなったときに、緯度円上の点の数を M_i に減らす。その境目となる緯度は $\phi_i = \arccos(M_i/N)$ で求める。これにより半球の配置が完成する。

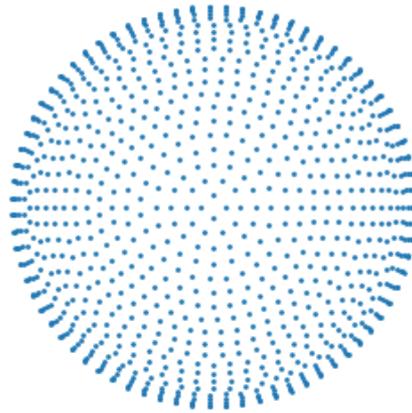


図 1.2 逡減格子

北半球の節点配置。節点数は 3078 点。

1.2.3 Hammersley 節点

Hammersley node (Wong et al. 1977)はビット反転を用いた節点配置である。2次元における Hammersley node は式(1.2)で決まる。

$$X_i = \begin{pmatrix} \frac{i}{n} \\ \Phi_2(i) \end{pmatrix} \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.2)$$

n は節点数であり、 $\Phi_2(i)$ は式(1.3)で求まる。

$$\Phi_2(i) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1^2}{2} + \dots + \frac{a_m^{m+1}}{2} \quad (1.3)$$

ここで $x = a_0 + 2a_1 + \dots + 2^m a_m$ である。例えば $i = 2$ のとき、2は2進数で10であり、10の順序を逆にして小数点以下の数とし0に加えると0.01である。さらに0.01は10進数で0.25となる。これにより $\Phi_2(2) = 0.25$ と求まる。Hammersley node の $n = 100$ における平

面上での節点配置を図 1.3 に示した。球面への投影は (緯度, 経度) = (θ, λ) とすると式 (1.4) によって行われる。

$$\begin{cases} \theta = \arccos(1 - u) \\ \lambda = 2\pi v \end{cases} \quad (1.4)$$

ここで $u = \frac{i}{n}$, $v = \Phi_2(i)$ である。

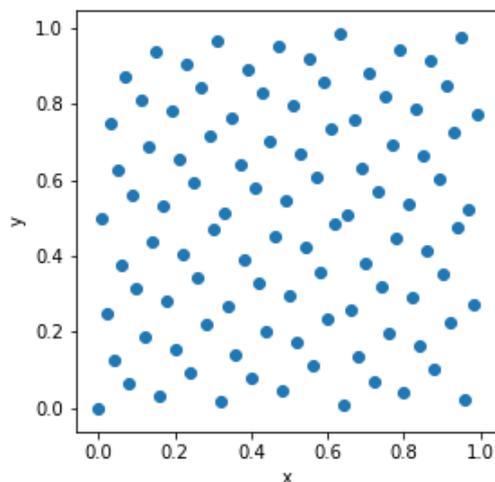


図 1.3 単位平面上の Hammersley 節点。節点数 $n = 100$

1.3 動径基底関数

動径基底関数(Radial Basis Functions : RBF)は距離のみに依存する基底関数である。一般的によく使われる RBF を図 1.4 に示した。距離 $r = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ である。RC と TPS は有限回微分可能な RBF と呼ばれる。RC は 3 回までしか微分ができず、また TPS は 3 階微分が $r = 0$ で発散する。GA、MQ、IMQ、IQ は無限回微分可能な RBF と呼ばれ、形状パラメーター ε が無限回微分可能な RBF の形状を決める。 ε を 3 段階変化させた GA を図 1.5 に示す。 ε が小さくなるほどなだらかな形になり、逆に大きな値を取るほど尖った形を取るようになる。

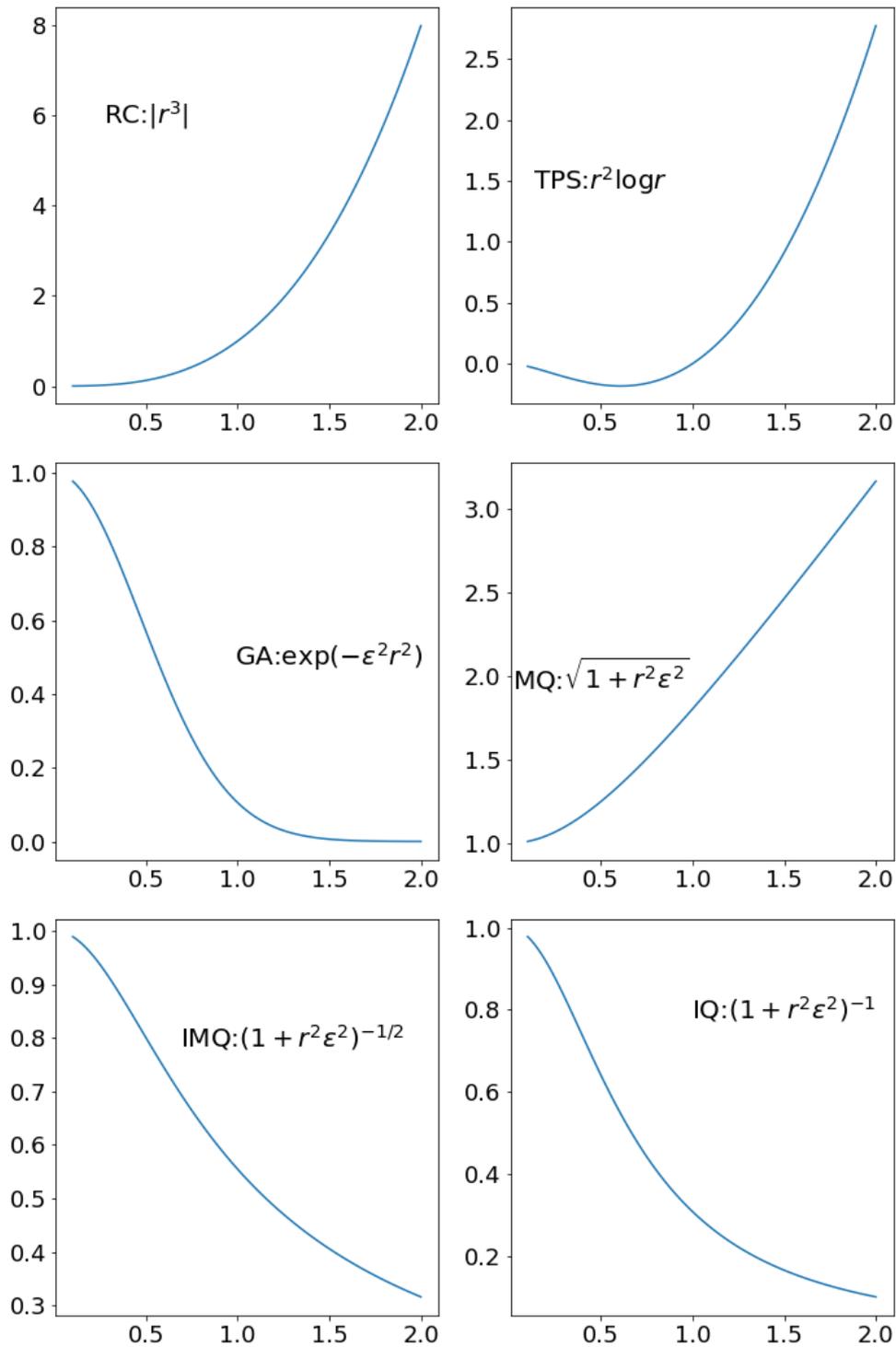


図 1.4 一般的に使われている RBF の例。

RC= radial cubic、TPS=thin plate spline、GA = Gaussian、MQ= MultiQuadric、IMQ= Inverse MultiQuadric、IQ= Inverse Quadric である。横軸が距離、縦軸は RBF の値。

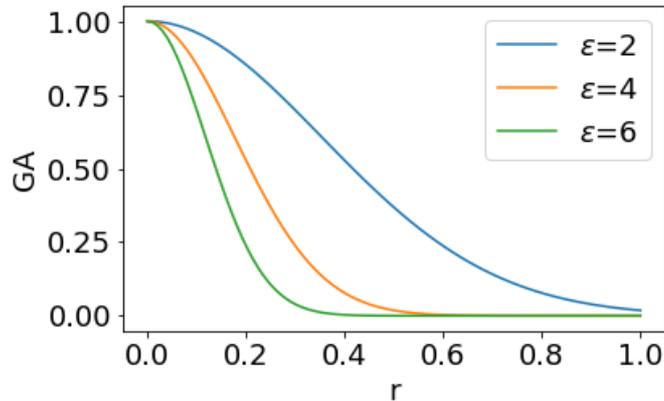


図 1.5 異なる ε に対する GA の形状。横軸が距離、縦軸は GA の値。

1.4 RBF 法

本節では RBF を用いた計算手法について述べる。まず初めに内挿から述べていく。内挿は RBF を用いた手法の基礎となる。次に境界値問題（楕円型偏微分方程式）の解法、次に RBF を用いた球面上の移流モデル。数理的最適化を用いた局所細密化節点における RBF 移流モデルを述べる。

1.4.1 RBF を用いた内挿

本研究では移流方程式の解法に RBF を用いた手法を適用する。RBF は空間微分の離散化を近似するために用いられる。式(1.5)で表されるように関数 h は RBF と係数 λ の積の線形結合で近似される。

$$h(\mathbf{x}) \approx s(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(r_j) \quad (1.5)$$

N : 節点数、 λ_j : 節点 \mathbf{x}_j における係数、 $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$ 、 $\phi(r)$: RBF

RBF は節点配置から求まるが、係数 λ は関数 $h(\mathbf{x})$ の情報から決めなければならない。係数 λ の決定法は内挿において登場する手法と同じである。よって本節ではまず空間微分の離散化に関わる内挿を述べる。

初めに、RBF の内挿の特徴について述べる。RBF を用いた内挿は格子を必要とせず、高い精度の補間が可能であり、関数の次元が増えても内挿が複雑にはならない特徴がある。式(1.5)で $h(\mathbf{x})$ は座標 \mathbf{x} (3次元デカルト座標系では x, y, z) における関数であるが、右辺では座標系が明示的に表れない距離 r の関数と係数 λ によって決められている。すなわち、RBF 展開は格子を必要とせず、座標系の影響を受けない特徴がある。

RBF を用いた内挿の精度は Fornberg and Wright (2004)において検証されている。実験

は正方形の2次元の領域に散在した点(図 1.6)を用いて関数を近似し、点(0.3, -0.2)への内挿である。基底関数には MQ RBF が使われており、 ε を 0.2 まで小さくすることで内挿の絶対誤差が 1.4×10^{-9} まで減少し、それより小さな ε では計算が不安定になることが示された(図 1.7)。

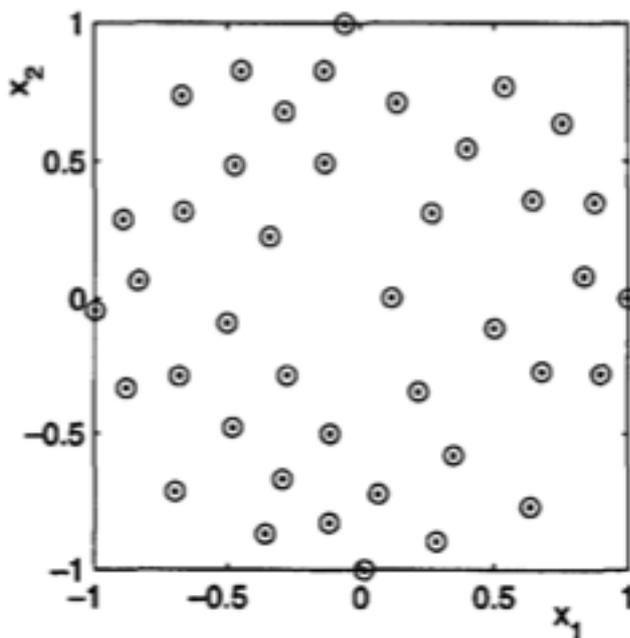


図 1.6 散在する 41 点のデータ点
Larsson and Fornberg (2003) Fig.1。

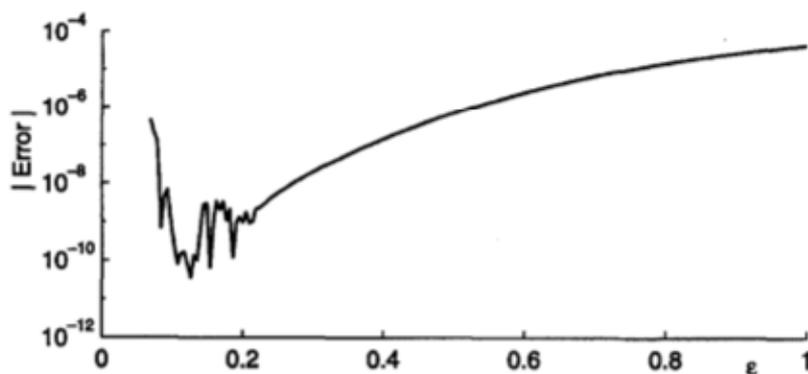


図 1.8 内挿における ε に対する絶対誤差
Fornberg and Wright (2004) Fig.2。

1.4.2 境界値問題の解法

RBF を用いた内挿を発展させたものとして境界値問題の解法がある (Larsson and Fornberg 2003)。境界値問題では内挿問題同様に関数を近似するが、内挿とは異なる係数の決定法を用いる。境界値問題では関数 F をRBFで近似し、境界上の点と内部の散在する点にそれぞれ境界値 F と微分値 ΔF を与え、内部領域での関数 F を推定する。

単位円内に準一様に配置した点に上で境界値を与え評価点の値を内挿して求める実験で検証されている (図 1.9 Larsson and Fornberg 2003)。最大誤差は内挿同様に ε が小さくなるにつれて誤差が改善し、ある値よりも小さい ε で誤差が増える。

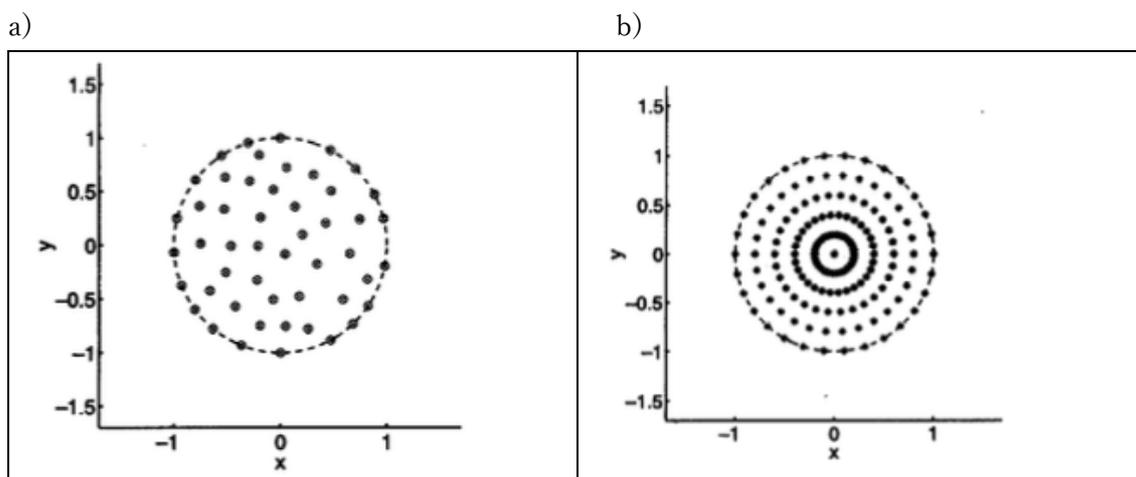


図 1.9 a) 50 個のデータ点と b) 評価点。Larsson and Fornberg (2003) Fig.1

1.4.3 RBF を用いた球面上の移流モデル

本研究で用いる RBF を用いた球面上の双曲線型偏微分方程式の解法は Flyer and Wright (2007)において定式化された。Flyer and Wright (2007)では RBF を用いた球面上の双曲線型偏微分方程式の解法を用いて線形の移流方程式を扱ったテストケースを解いている。テストケースは剛体回転(第 3.2.1 節参照)と両極にある静止した渦の巻き上げ(第 3.2.2 節参照)が行われている。

RBF 移流モデルでもスペクトルモデル同様に、剛体回転において初期値が無限回微分可能であればスペクトル精度が得られ、有限回しか微分できない場合は代数的な収束になることが示されている。また剛体回転において微分行列の固有値と数値積分手法の安定領域から安定な時間刻み幅の最大値が計算できることや、RBF 移流モデルが長い時間刻み幅が取れることが示されている。RBF 移流モデルの安定性を決める固有値の虚部の最大値は節点数の増加に合わせて増加し、 ε の減少に対しても増加する。

渦の巻き上げ実験においても RBF 移流モデルがスペクトル精度であることが示されている。また渦の巻き上げ実験では安定性を決める固有値に実部があるため、時間刻み幅により安定領域内の固有値の数が増え安定性が変化する。

1.4.4 数値的最適化を用いた局所細密化節点における RBF 移流モデル

Flyer and Wright (2007)を発展させた研究として Flyer and Lehto (2010)がある。この研究は Flyer and Wright(2007)において定式化された球面上の双曲線型偏微分方程式の解法を用いた移流モデルに対して局所細密化節点を適用した研究である。

RBF 移流モデルに局所細密化節点を用いる動機は二つの利点があるからである。一つ目は計算量を減らせることである。領域全体の点を用いる RBF を用いた双曲線型偏微分方程式の解法は時間積分の際にステップ毎に節点数を N としたときに $O(N^2)$ の計算量を伴う計算が必要であり、領域全体の高解像度化は計算コストの面から望ましくない。しかし局所細密化を用いることにより特定の領域のみの高解像度化が可能になり節点数の増加を抑えられ、計算コストの削減が可能になる。二つ目は条件数の増加の抑制である。RBF 移流モデルに局所細密化を用いると解像度が低下していく領域（節点数の少ない領域）で Runge 現象（一般的に知られている事例は高次の多項式近似において境界付近で誤差が生じること）が生じる可能性がある(Fornberg and Zuev 2007)。そこで対策として領域ごとに RBF の形状パラメーター ε を変化させる(2章参照)。この形状パラメーター ε の領域ごとの変化が式(2.1.1)における係数行列 \mathbf{A} の条件数を小さくする(図 1.10)。これは空間微分の離散化をより正確にする傾向がある。

Flyer and Lehto(2010)では両極にある静止した渦の巻き上げ実験、及び移動する渦の巻き上げ実験をテストケースとして局所細密化節点を用いた移流モデルの性能実験を行っている。後者のテストケースは取り扱わないので紹介しない。

Flyer and Lehto(2010)の用いた局所細密化アルゴリズムは静電反発法である。このアルゴリズムは球面上に束縛された電荷が斥力で反発し平衡状態になる電荷の配置を数値的最適化により求める。静電反発法により局所細密化された ME 節点を図 1.11 に示す。静電反発法による局所細密化節点と距離に基づく ε を用いた静止した両極にある渦の巻き上げ実験が行われた。準一様な節点配置をもちいた実験と局所細密化節点を用いた実験の誤差が $t = 3$ において比較がされた(図 1.12)。 l_∞ 、 l_2 誤差では1桁から2桁の誤差の改善があった。

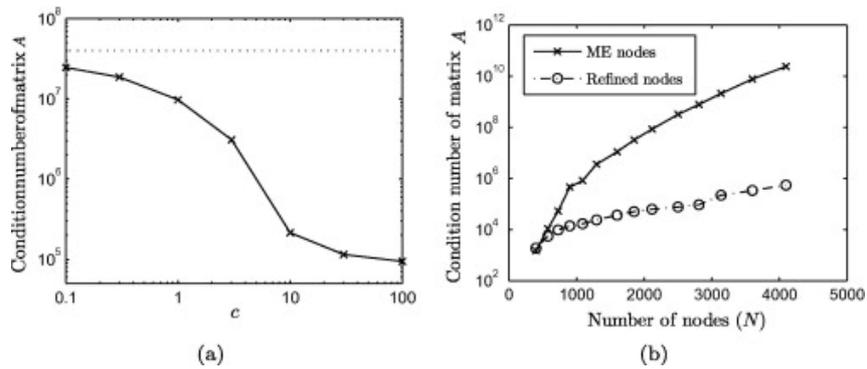


図 1.10 係数行列 \mathbf{A} の条件数

a) 点を集めるパラメータ c に対する節点数 1849 の条件数。b) は節点数に対する条件数を準一様な節点配置と局所細密化節点を用いた場合との比較。Flyer and Lehto (2010)

Fig. 6

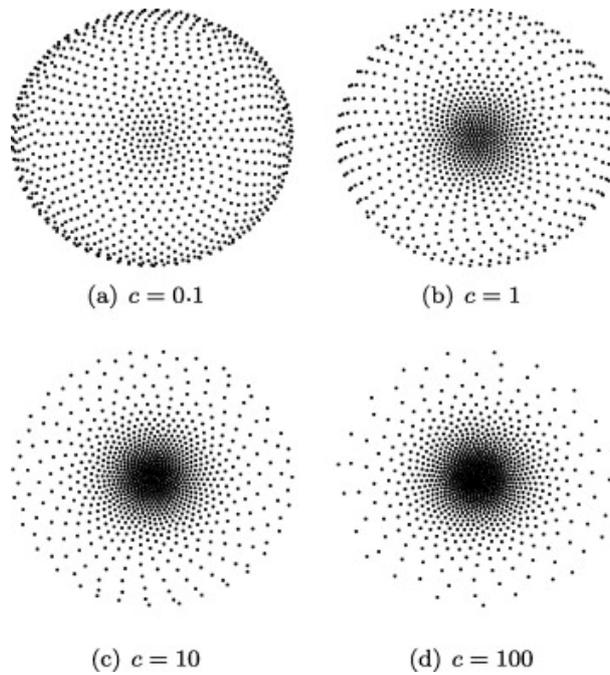


図 1.11 静電反発法による北半球の局所細密化節点。節点数は 1849。 c は点の集め方を決めるパラメータ。Flyer and Lehto(2010) Fig.3

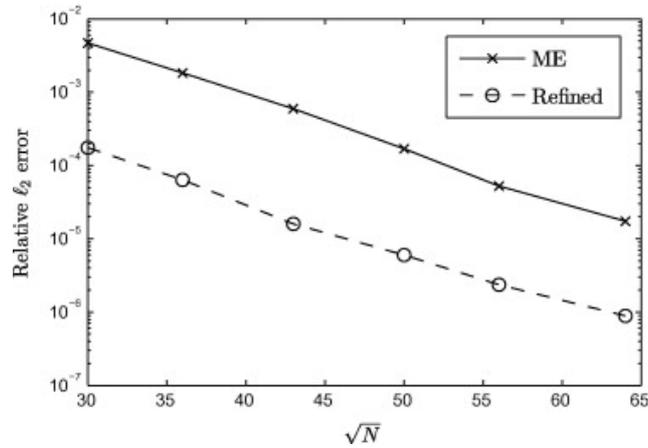


図 1.12 \sqrt{N} に対する l_2 誤差。Flyer and Lehto(2010) Fig.11

1.5 研究目的

Flyer and Lehto (2010)の局所細密化手法は数値的最適化を用いている。そのために大気大循環モデルのような巨大な節点数に対して適用すると、節点数に対して指数関数的に増加すると考えられる極小値に陥り、正しい解にたどり着かない可能性がある。最小エネルギーは節点数が増えれば増えるほどわずかな点の移動では変化量がほとんどなく、極小値となる節点配置から抜け出すことが困難になる。また数値的最適化により得られた解の正誤の判定が難しい。そこで本研究では、節点の局所細密化に巨大な節点数が確実に求められる決定論的な手法に置き換え、移流モデルで検証を行う。

また、ME 節点のように作成者によって異なる配置になりうる節点配置を用いた実験では、追実験が異なる結果になることが考えられる。よって先行研究の行った実験の追試が必要である。

以上のことから本研究の目的は RBF を用いた数値手法の精度と性質の検証及び RBF を用いた球面上の移流モデルに対する決定論的な局所細密化の適用を検証することである。

第2章 RBFを用いた数値手法

本章ではRBFを用いた内挿、境界値問題の解法、移流モデル、移流モデルに対して適用した決定論的な局所細密化手法とそれに関わる各種パラメータの決定方法について述べる。

2.1 内挿のアルゴリズム

例題を用いて内挿のアルゴリズムを説明する。例えば、図2.1のような2次元の正方形の領域内の赤い点での関数 h がわかっているとして、青い点での関数の値を知りたいとする。内挿には3つのステップが必要である。まず、それぞれの赤い点 \mathbf{x}_i からその他の赤い点 \mathbf{x}_j とまでの距離 $r_{i,j} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ に対しRBF $\phi(r_{i,j})$ を計算する。次に関数 h を

$$h(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$$

により近似する。係数 λ は選点法によって決める。選点法は点 \mathbf{x} における関数 $h(\mathbf{x})$ の値と近似された関数 $s(\mathbf{x}, \varepsilon)$ との残差 $R(\mathbf{x})$ が $R(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - s(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$ を満たすように係数を決める方法である。これは式(2.1)の線形システムを解くことと同じである。

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{h} \quad (2.1)$$

\mathbf{A} は $A_{i,j} = \phi(r_{i,j}) = \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$ であり $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ は既知の値があるデータ点、 \mathbf{h} は点 \mathbf{x} でのデータ。

変数 N 個に対して式が N 個あるので係数が求まる。最後に内挿点(青い点) \mathbf{x} とデータ点(赤い点) \mathbf{x}_i からRBFを計算し、式(2.2)によって内挿を行う。

$$s(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) \quad (2.2)$$

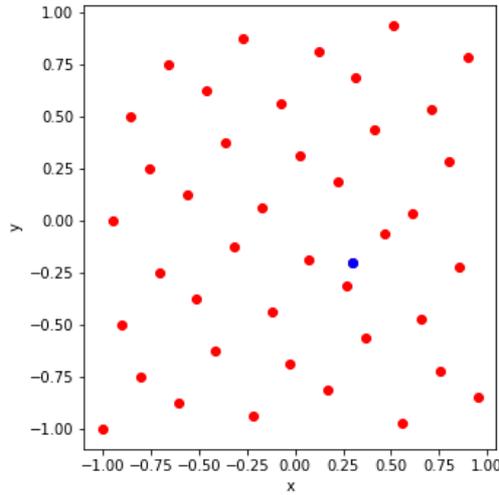


図 2.1 データ点と内挿点。赤点がデータ点であり青点が内挿される点

2.2 境界値問題の解法

境界値問題の解法では係数の決定に用いられる選点法が内挿と異なる。例えば

$$\begin{cases} g, & \text{境界上の値} \\ f, & \text{領域内の値} \end{cases}$$

が既知の値であり、 $f = \Delta g$ である時、係数は式(2.3)の線形システムを解くことによって決定される。

$$\begin{bmatrix} \phi \\ - \\ \Delta\phi \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} g \\ - \\ f \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

ϕ : RBF

2.3 RBF 法を用いた移流モデル

2次元移流方程式は式(2.4)で表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla h \quad (2.4)$$

式(2.4)の空間微分 ∇h をRBF法で離散化をする。領域全体の点における関数 h の近似は内挿行列 \mathbf{A} と係数ベクトル λ の積で

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}\lambda$$

であり、点 x_i においてRBFを用いて

$$h_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \phi_j(r) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

である。ここで両辺に ∇ を作用させると

$$\nabla h_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \nabla \phi_j(r_{i,j})$$

である。ここで $\nabla \phi_j(r_{i,j}) = B_{i,j}$ と置くと

$$\nabla h_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) B_{i,j} \quad (2.5)$$

と書ける。行列とベクトルで表すと

$$\nabla \mathbf{h} = \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{h}(t) = \mathbf{D}_N \mathbf{h}(t) \quad (2.6)$$

となるここで $\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{h}(t)$ を用い、 $\mathbf{D}_N = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$ と置いた。 \mathbf{D}_N は微分行列と呼ばれる。 $\nabla \mathbf{h}(t)$ の近似 $\mathbf{D}_N \mathbf{h}(t)$ の時間変化項は $\mathbf{h}(t)$ だけなので、時間積分をする前に 1 回だけ \mathbf{D}_N を計算すればよい。時間積分の計算では $\nabla \mathbf{h}(t)$ は $\mathbf{D}_N \mathbf{h}(t)$ の行列ベクトル積に置き換えられる。

2.4 局所細密化節点と RBF 移流モデル

決定論的に局所細密化するために Schmidt 変換を用いる。まず Schmidt 変換を説明し、テストケースに合わせて両極に細密化する工夫について述べる。

2.4.1 Schmidt 変換

Schmidt 変換(図 2.2)は Schmidt (1977)により考案され、緯度のみを変換する。 θ を緯度とし、変換後の緯度を θ' とすると変換は次式により行われる。

$$\theta' = \arcsin \left(\frac{(1 - c^2) + (1 + c^2) \sin(\theta)}{(1 + c^2) + (1 - c^2) \sin(\theta)} \right) \quad (2.7)$$

ここで c は拡大率である。

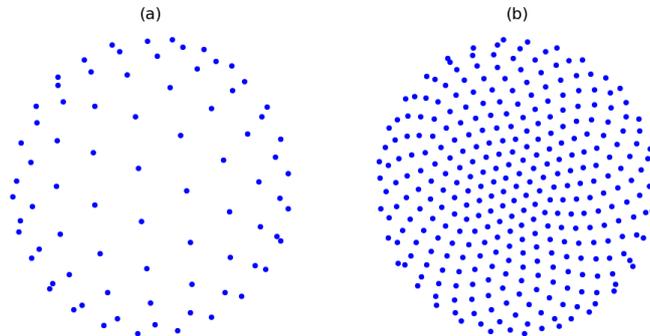


図 2.2 Schmidt 変換を施した節点配置。(a)南極から見下ろした南半球上の節点 (b)北極から見下ろした北半球上の節点配置。

2.4.2 両極への局所細密化

両極にある静止した両極にある渦の巻き上げ実験をテストケースとして用いるために両極への細密化を行う必要がある。そこで拡大率 c を変更する。 $\mu = \sin(\theta)$ としたときに

$$c = c_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (2.8)$$

c_0 : $\theta = \pi/2$ における拡大率 θ : 緯度(rad)

とすると両極に局所細密化できる(図 2.3)。

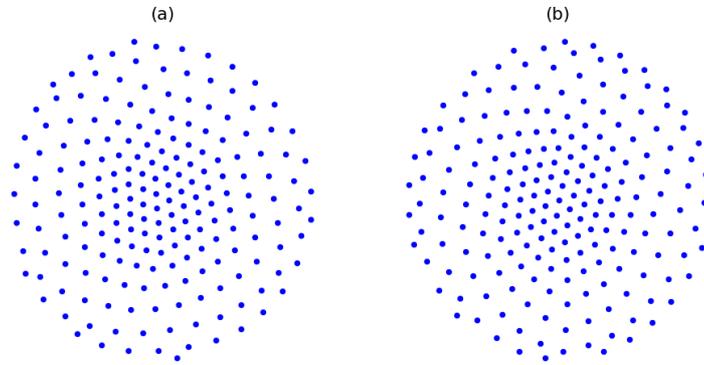


図 2.3 両極に局所細密化を施した節点配置。(a)南極及び(b)北極から見下ろした節点配置。節点数は 400。

2.4.3 局所細密化に対する形状パラメーター

RBF 補間における Runge 現象の対策はいくつか存在するが、今回は Flyer and Lehto(2010)で用いられた形状パラメーター ε を領域ごとに変化させる手法を採用しており、先行研究は節点間距離を用いて ε の値を決定していた。節点間距離に基づく ε の決定法は点 \mathbf{x}_i での ε を ε_i とすると式(2.9)で求まる。

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \left(\frac{\max_j d_{i,\min}}{d_{i,\min}} \right) \quad (2.9)$$

$d_{i,\min} = \min(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, j = 1, \dots, N)$ であり、 ε_0 は $\max_i d_{i,\min}$ を持つ節点における ε である。

ε の変化方法は局所細密化に合わせるために緯度ごとに変化させている。本研究では緯度依存性を持たせるためにマップファクターを用いた。マップファクターは式(2.10)で求められる。

Schmidt 変換は緯度のみを変換するので $\frac{\partial \mu}{\partial \mu}$ のみが残るのでマップファクター F は式

(2.11)で求められる。

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda} & \frac{\partial \mu'}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \lambda'}{\partial \mu} & \frac{\partial \mu'}{\partial \mu} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

$$F(c, \mu) = \frac{\partial \mu'}{\partial \mu} = \frac{4c^2 + 4c(\mu^2 - 1) \frac{dc}{d\mu}}{(1 + c^2 + \mu(1 - c^2))^2} \quad (2.11)$$

$$\mu = \sin(\theta)$$

ε はマップファクターを用いて式 (2.12) において決定した。

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{F(c, \mu')}} \quad (2.12)$$

$$\mu' = \sin \theta'$$

ε_0 : 拡大縮小されていない領域($F=1$)での ε である。

本研究で用いた ε を緯度の関数として局所細密化されたME節点における節点間距離の最小値と共に図 2.4 に示す。節点間距離が縮まるとともに ε が大きくなる。この変化が係数行列 **A** の条件数を小さくする。条件数は解像度が上がるにつれて大きくなる。一方で ε を大きく取ることによって条件数を下げることができる。

c_0 ごとの $N = 3136$ 、 $\varepsilon_0 = 3.5$ における条件数を図 2.5 に示す。 c_0 は0.1~0.9まで0.1刻みごとに調べている。条件数は $c_0 = 0.7$ から c_0 が小さくなるにつれて小さくなる。これは極域での ε の値が大きくなり条件数が改善されるからである。しかし一定以上は改善されない。 $c_0 = 0.8$ 、 0.9 で条件数が改善する理由は解像度が上がることによる条件数の増加に対して ε が変動することで条件数が小さくなる効果の方が勝っているためだと考えられる。

c_0 に関する制約について説明する。図 2.6 に c_0 ごとの ε の幅を示す。 $c_0 = 0.5$ より小さくすると ε の最大値が大きくなるために、渦の中心部の近似の精度が落ちる結果となるので c_0 の小さな値を用いることは推奨されない。また c_0 大きく取る方向では $c_0 = 1$ より上では細密化したい箇所を逆に疎にする方向に変換してしまう(赤道域が密になる)。また $c_0 = 1$ ではマップファクターが全ての領域で1になるため使えない。よっての $c_0 = 0.5 \sim 0.9$ 範囲で使うことを推奨する。この制約は両極に対する局所細密化節点に対する制約であり、変更を加えていないSchmidt変換ではまた異なった値になることに注意が必要である。

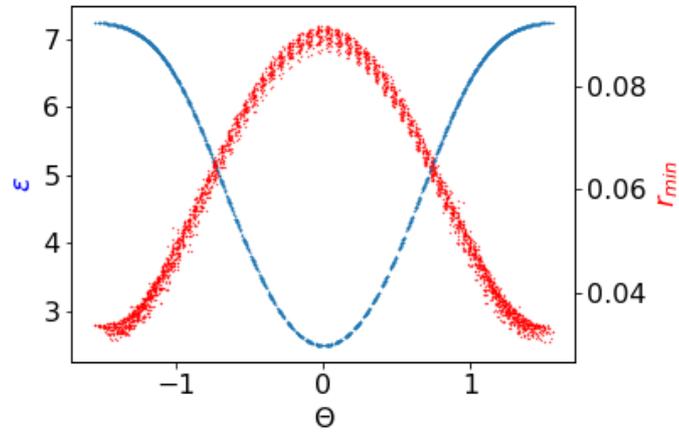


図 2.4 緯度依存する ε と節点間距離

横軸は緯度(rad)、左の縦軸は ε 、右の縦軸は節点間距離の最小値である。 $\varepsilon_0 = 3.5, c_0 = 0.5$ である。

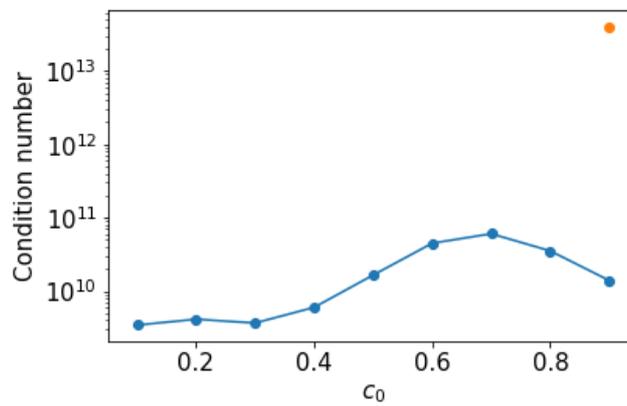


図 2.5 c_0 ごとの内挿行列の条件数

縦軸は条件数を示し、横軸は c_0 である。オレンジの点は一様な節点配置における条件数である。 $N = 3136, \varepsilon_0 = 3.5$ である。

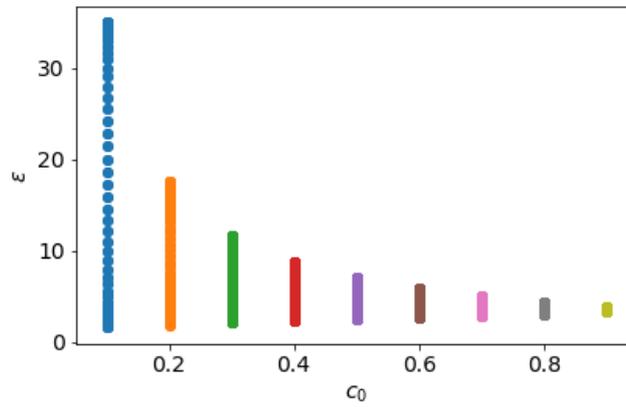


図 2.6 c_0 ごとの ϵ の値の幅

この図は c_0 ごとの ϵ の値の最小最大及びその間にある値を示している。横軸は c_0 であり、縦軸は ϵ である。 $\epsilon_0=3.5$ で全ての設定で共通である。

第3章 数値実験

本章では第3.1, 3.2節ではRBF法の精度の検証を行う。次に第3.3節においてRBF移流モデルに対する決定論的な局所細密化節点を適用し、渦の巻き上げ実験を行う。

3.1 RBFの精度検証

本節ではRBFを用いた内挿と境界値問題の精度検証の実験と結果を示す。

3.1.1 内挿問題

Fornberg and Wright (2004)で行われた内挿実験を行った。実験は単位平面上に散在する41点のデータ点(図3.1)を用いて点(0.3, -0.2)に内挿を行う実験である。テスト関数は次式で表される。その概形を図3.2に示す。

$$f(x, y) = \frac{59}{67 + \left(x + \frac{1}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{11}\right)^2} \quad (3.1)$$

内挿の誤差を絶対誤差 E

$$E = |f_a - f_n|$$

f_a は厳密解、 f_n は数値解である。

で計算し、形状パラメーター ε ごとに絶対誤差を図3.3に示す。 ε は0.1から4までの0.1刻みで40通りを計算している。基底関数にはMulti Quadric

$$\phi(r) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 r^2} \quad (3.2)$$

を用いている。無限回微分可能なRBFを用いた内挿の特徴である ε を小さく取ることによって誤差が小さくなっていくことが確認できる。 $\varepsilon = 0.1$ において絶対誤差 $E \sim 7.1 \times 10^{-12}$ であり高精度な結果が得られている。

0.01~1までの0.01刻みで ε を変化させた結果を図3.4に示した。 ε は小さくなるにつれて精度は向上するが一定以上小さくすると内挿の精度が悪化する。これは係数 λ が正確に計算できていないためである。係数 λ は式(2.1)で計算されるので、不安定を引き起こす原因は行列 \mathbf{A} とベクトル \mathbf{b} の性質である。条件数は線形システムの解きやすさを示す指標である。条件数が大きくなればなるほど正確に係数 λ を計算することが困難になる。図3.5に ε に対する条件数を示す。条件数は ε が小さくなるにつれて大きくなっていき、不安定を起こす領域ではおよそ $O(10^{15})$ で、悪条件であることが示唆される。

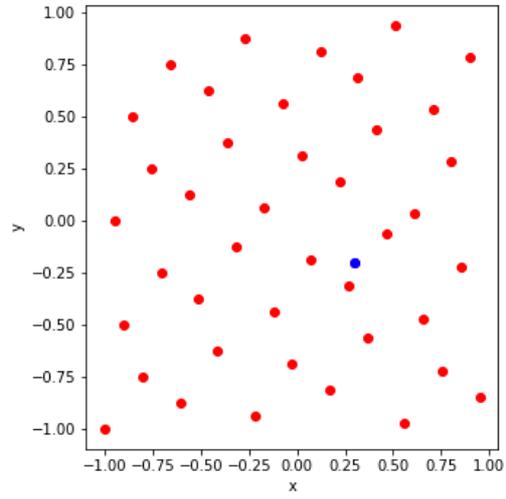


図 3.1 データ点と内挿点。赤点はデータ点、青点が内挿される点。

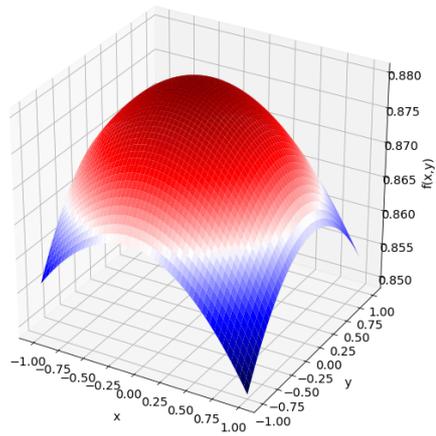


図 3.2 テスト関数の概形

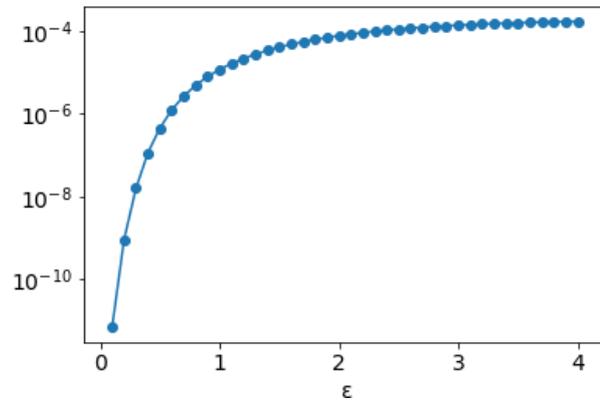


図 3.3 内挿の絶対誤差。横軸は ε 、縦軸は絶対誤差（対数）。

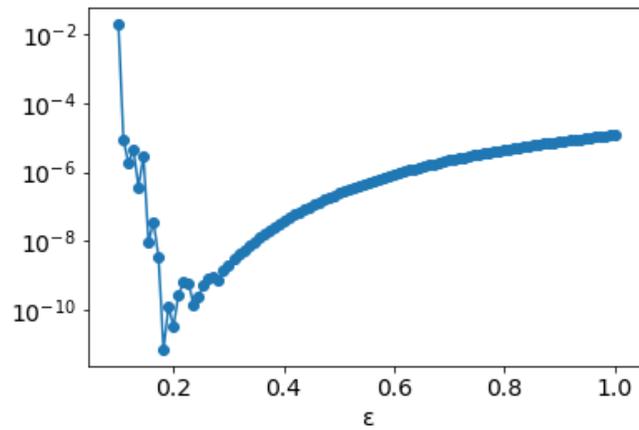


図 3.4 小さな ε に対する誤差の変化。横軸は ε 、縦軸は絶対誤差（対数）である。

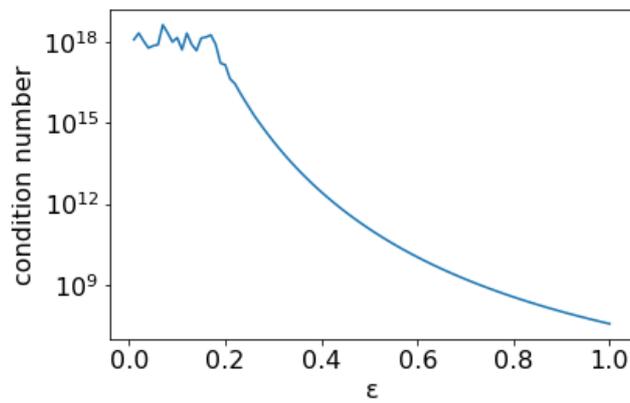


図 3.5 ε に対する係数行列 \mathbf{A} の条件数。横軸は ε 、縦軸は条件数（対数）である。

3.1.2 境界値問題

RBF を用いた境界値問題の精度を検証するために Larsson and Fornberg (2003) の実験の一つを行った。テスト関数 u_1 を式(3.3)とする。概形は図 3.6 に示す。

$$u_1 = \frac{65}{65 + (x - 0.2)^2 + (y + 0.1)^2} \quad (3.3)$$

u_1 は境界上の値として与え、領域内の点には Δu_1 を与える。テストに用いたデータ点は単位円内に作られ、節点配置を図 3.7 に、誤差の評価点を図 3.8 に示す。データ点は Hammersley 節点で作られている。単位平面上に作成した節点を次式で変換している。

$$\begin{cases} x_2 = (x_1 - c) \cos(2\pi y_1) \\ y_2 = (x_1 - c) \sin(2\pi y_1) \end{cases}$$

$c = \frac{\sqrt{\pi}}{n}$, n : 境界内の節点数。ただし、 $x_1 = 0$ のとき $c=0$

テストはデータ点から式(2.3)で係数 λ を計算し、RBF と λ の積の線形結合による内挿から領域内の評価点での関数 u_1 を求める。

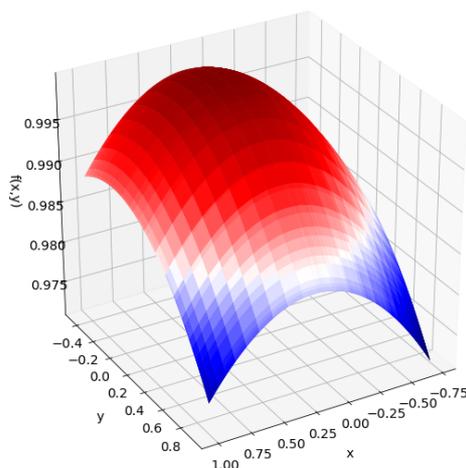


図 3.6 u_1 の概形

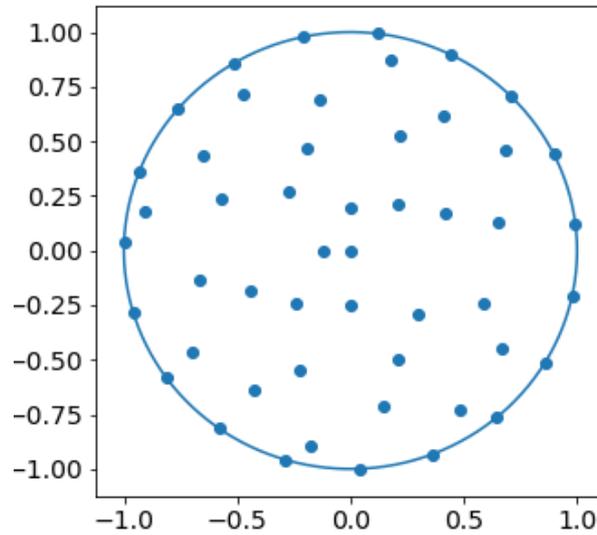


図 3.7 実験で用いたデータ点

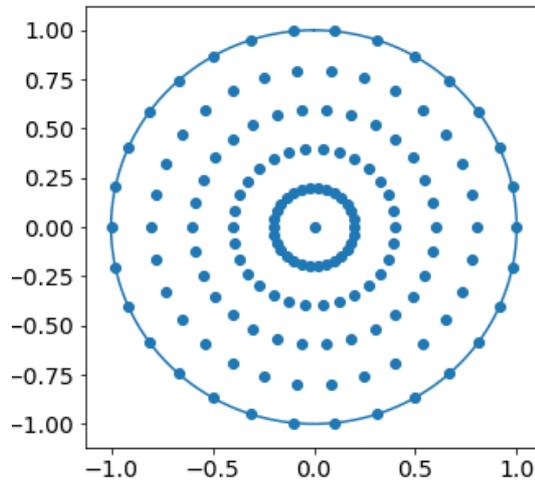


図 3.8 誤差の評価点

最大誤差($E(\varepsilon) = \max|u_{\text{exact}} - u_{\text{num}}|$)を図 3.9 に示し、 ε に対する内挿行列の条件数を図 3.10 に示した。誤差は $\varepsilon = 0.01$ から 1 まで 0.01 刻みで調べた。 $\varepsilon = 1$ から $\varepsilon = 0.16$ にかけて誤差は減少するが $\varepsilon = 0.16$ より小さな値では安定的に計算できていない。しかし、 $\varepsilon = 0.16$ における最大誤差は 9.6×10^{-9} であり、十分に高精度である。安定的に計算ができていないことは条件数が大きく悪条件であることに原因がある。

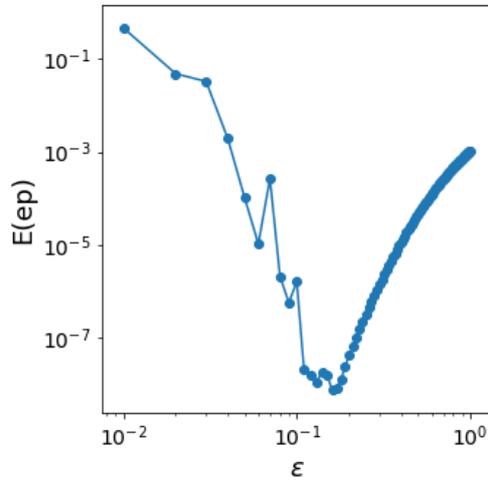


図 3.9 最大誤差と ε 。横軸が ε (対数)、縦軸は最大誤差 (対数)。

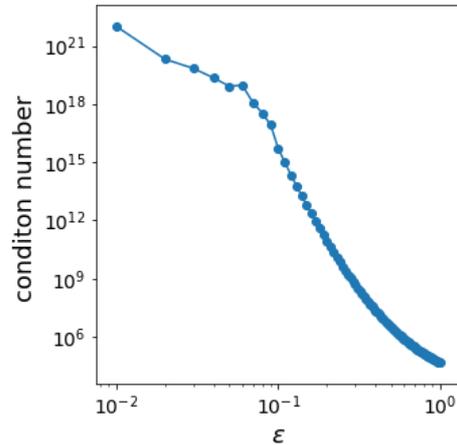


図 3.10 ε と条件数。横軸が ε (対数)、縦軸は内挿行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi \\ - \\ \Delta\phi \end{bmatrix}$ の条件数 (対数)

3.2 球面上の移流

本節では RBF 法を用いた双曲線型偏微分方程式の解法の精度を検証する。テストケースは剛体回転と両極にある静止した渦の巻き上げをおこない、最後に RBF 移流モデルの安定性を調べる。

3.2.1 剛体回転

本節で扱うテストケースは余弦型の山(cosine bell)とガウス型の山(Gaussian bell) (図 3.11) を剛体回転の風で移流させ 1 2 日間で球面上を一周させるテストケースである。風は

$$u = u_0(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos \lambda \sin \alpha)$$

$$v = -u_0 \sin \lambda \sin \alpha$$

で表され、 u_0 は赤道での風速を決める任意のパラメーターであり、 α は傾けた風と赤道とのなす角である。Cosine bell は

$$h(\lambda, \theta) = \frac{h_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\rho}{R}\right) \right], \quad \rho < R$$

$$h(\lambda, \theta) = 0, \quad \rho \geq R$$

で定義され、Gaussian bell は

$$h(\lambda, \theta) = h_0 e^{-\left(\frac{2.25\rho}{R}\right)^2}$$

であり、 ρ は次式で計算する。

$$\rho = a \arccos(\sin \theta_c \sin \theta + \cos \theta_c \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_c))$$

θ_c, λ_c は bell の中心の位置である。パラメーターの設定は $u_0 = \frac{2\pi a}{12(\text{day})}$, $R = \frac{a}{3}$, $a = 1$ $h_0 =$

1000, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ を用い、基底関数には GA RBF を用いて実験を行った。本テストケースにおける行列 B は

$$B_{i,j} = \{u(\lambda_i, \theta_i) \cos \theta_j \sin(\lambda_i - \lambda_j) + v(\lambda_i, \theta_i) [\cos \theta_j \sin \theta_i \cos(\lambda_i - \lambda_j) - \sin \theta_j \cos \theta_i]\} \left(\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) \Big|_{r=\|x_i-x_j\|}$$

で計算される。

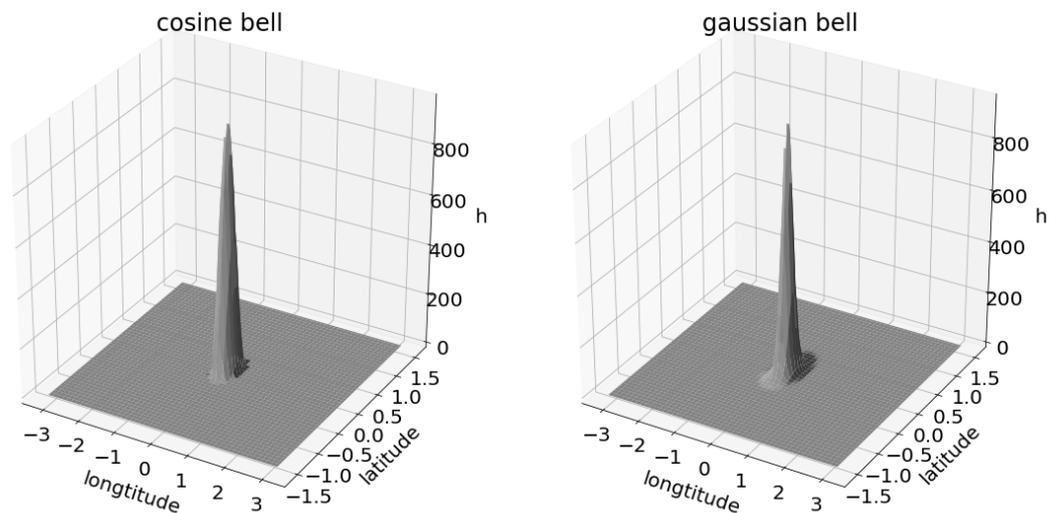


図 3.11 cosine bell と Gaussian bell の概形

3.2.1.1 誤差の収束性

RBF 法の空間微分の離散化の精度は解像度が現象に対して十分に高い場合は式(1.4.9)の D_N の計算の精度によって決まる。言い換えると、 ∇h_i が RBF と係数 λ_i の積の線形結合 $\sum_{j=1}^N \lambda_j \nabla \phi_j(r)$ によってどれほど正確に近似されているかが精度を決める大きな要因である。

線形結合による近似は ε によって精度を変え、展開項の数（節点数）が変化することでも精度は変わる。よって本節では ε 、節点数を変化させた場合のRBF法の精度を検証している。

本論文での正規化誤差は以下の式で評価される。

$$l_1 = \frac{\|h_a - h_n\|_1}{\|h_a\|_1}$$

$$l_2 = \frac{\|h_a - h_n\|_2}{\|h_a\|_2}$$

$$l_\infty = \frac{\|h_a - h_n\|_\infty}{\|h_a\|_\infty}$$

注) ノルムの添字はノルムの種類を表し、 h_a は解析解、 h_n は計算解を意味する。
で計算されている。

図 3.12 に cosine bell の実験の節点数に対する誤差を示す。図 3.12 では $\varepsilon = 8.2$, 時間刻み幅 $\Delta t = 30$ [min], 節点数 $N = [529, 1024, 1849, 3136, 4096]$ の設定で計算した。時間積分には4次のルンゲクッタ法を用いた。同じ時間刻み幅で計算を行っているため、節点数が増えるにつれて時間切断誤差の割合が大きくなる。実際に $N = 1849$ では最大時間刻み幅は50分であり、 $N = 4096$ では30分であるため $N = 4096$ では時間切断誤差の割合が $N = 1849$ よりも大きい。cosine bell は無限回微分可能な関数ではないため低い次数の代数的収束になる。実際に $N = 529$ から $N = 1849$ にかけては $O(10^{-7})$ 相当の収束が見られるが $N = 1849$ から $N = 4096$ にかけては $O(10^{-2})$ の収束しか見られなかった。この誤差の収束の傾向は時間刻み幅 Δt を10[min]や5[min]に変えても変わらなかった。

次に無限回微分可能な初期値である Gaussian bell を用いた実験の節点数に対する誤差の収束性を図 3.13 に示す。先行研究が実験を行った設定の $\varepsilon = 8.2, \Delta t = 30$ [min]節点数 $N = [529, 1024, 1849, 3136, 4096]$ では指数的な誤差の収束率は見られなかった。しかし $\Delta t = 5$ [min]では節点数 1849 から 4096 にかけておよそ $e^{-\frac{\sqrt{N}}{2}}$ 相当の収束率が見られた。

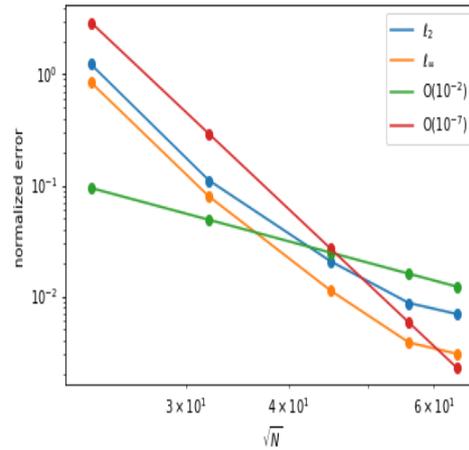


図 3.12 節点数の増加に対する正規化誤差の収束性。オレンジ線は l_∞ 誤差で青線が l_2 誤差。横軸は節点数の平方根（対数）、縦軸は正規化誤差（対数）。緑の線と赤の線は、それぞれ $O(10^{-2})$ と $O(10^{-7})$ の代数的収束を示す。

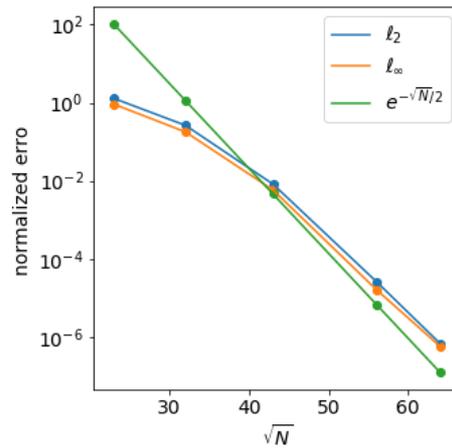


図 3.13 Gaussian bell の移流実験の誤差の収束性。横軸は節点数の平方根で縦軸は正規化誤差（対数）。緑の線は指数的収束率を示す。

3.2.1.2 形状パラメーター ε ごとの誤差の収束性

ε を変えて cosine bell の移流実験を行った結果を図 3.14 に示す。図 3.14 における節点数は $N=1849$ で固定され、時間刻み幅は 50[min]である。先行研究は $\varepsilon=1\sim 3$ も計算しているが、RBF-QR 法(Fornberg and Piret 2007)のような特別な方法を用いなければ、内挿行列 A は特異行列となり、正確に微分行列を計算することはできないので、 $\varepsilon = 4$ 以降の結果を示す。 ε が最も小さな値で最適な解にはなっていない。これは時間刻み幅を 30[min],10[min]に変えても同じ性質を示した。この特徴は先行研究と同じものである。

次に Gaussian bell の結果を図 3.15 に示す。先行研究の行った設定では同様の図が得ら

れなかったが $\Delta t=30[\text{min}]$ においては同様な図が得られた。最も小さな ε が最も良い結果となり、補間が小さい ε において高精度に行われることと整合性がある。また先行研究と同等の精度である。

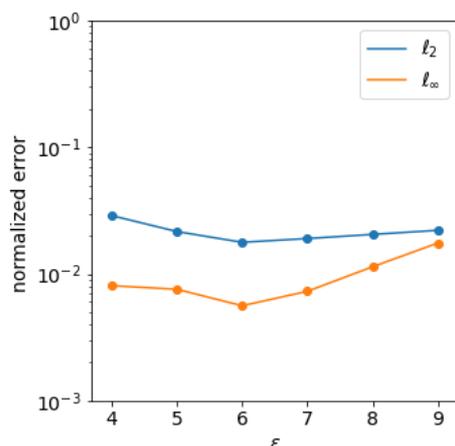


図 3.14 cosine bell の形状パラメーターに対する誤差の収束性の変化
横軸が ε 、縦軸が正規化誤差（対数）である。

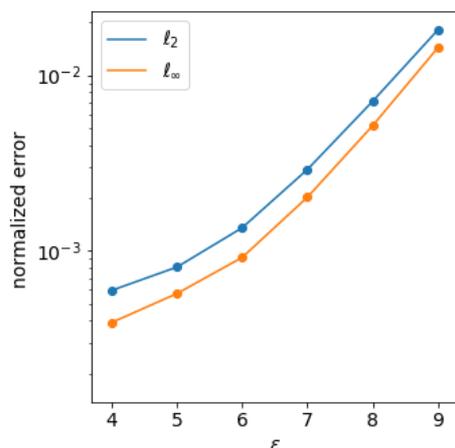


図 3.15 Gaussian bell の移流実験における ε ごとの誤差。横軸は ε 、縦軸は正規化誤差。

3.2.2 両極にある静止した渦の巻き上げ

両極にある静止した渦の巻き上げ実験は剛体回転と違い初期値が角速度によって巻き上げられていくものである。渦は対蹠点でも発生し、球面上に2つの渦が発生する。本テストケースは Nair et al. (1999)で行われた実験である。回転させた座標の緯度経度を (λ', θ') とするとテストケースは

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u'}{\cos \theta'} \frac{\partial h}{\partial \lambda'} = 0$$

であり、 u' は回転させた座標系の東西方向の風速であり、

$$u' = \omega(\theta') \cos \theta'$$

であたえられる。渦は定常で v' の成分はない。角速度 $\omega(\theta')$ は

$$\omega(\theta') = \frac{3\sqrt{3}}{2\rho(\theta')} \operatorname{sech}^2(\rho(\theta')) , \rho(\theta') \neq 0$$

$$\omega(\theta') = 0 , \rho(\theta') = 0$$

で与えられ、 $\rho(\theta') = \rho_0 \cos \theta'$ であり、 ρ は渦の半径である。本テストケースの解析解は

$$h(\lambda', \theta', t) = 1 - \tanh\left(\frac{\rho(\theta')}{\gamma} \sin(\lambda' - \omega(\theta')t)\right)$$

で与えられる。解析解の $t = 3$ における図 3.16 に示す。 γ はスカラー値 h の 0 付近の領域(図 3.16 の白い領域)の広さを決める。回転していない座標系での風速は回転させた北極の位置を (λ_p, ϕ_p) とすると

$$u = \omega(\theta')(\sin \theta_p \cos \theta - \cos \theta_p \cos(\lambda - \lambda_p) \sin \theta)$$

$$v = \omega(\theta') \cos \theta_p \sin(\lambda - \lambda_p)$$

で与えらる。しかし、RBF は座標系の構造を用いた空間離散化をしないため、傾けた座標系のまま計算が行える。 $W = \operatorname{diag}(\omega(\theta'))$ とするとテストケースで解く方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -W D_N \mathbf{h}$$

であり、ここで $D_N = B A^{-1}$ であり

$$B_{i,j} = \cos \theta'_i \cos \theta'_j \sin(\lambda'_i - \lambda'_j) \left(\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}\right)$$

で与えられる。本研究でのパラメーターの設定は $\gamma = 5$ 、 $\rho_0 = 3$ である。

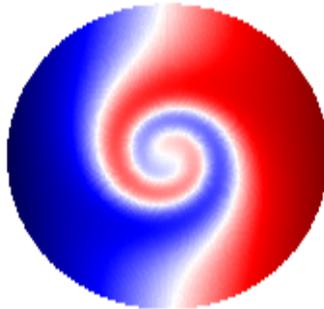


図 3.16 $t = 3$ における解析解。北極に作った渦を北極の上から見下ろした図。

3.2.2.1 収束性の検証

回転させていない座標系の極に渦の中心を置き、 $\varepsilon = 6.45$ 、節点数 $N = 3136$ 、時間刻み幅は $3/15$ 、GARBFを用い、 $t = 3$ まで計算し、 $|h_a - h_n|$ を節点上にプロットしたものを図 3.17 に示す。誤差は渦の中心部が最大で、低緯度に向かうにつれて小さくなる。

次に節点数ごとの正規化誤差を図 3.18 に示した。節点数は剛体回転と同様に 529~4096 点の 6 通りを計算した。正規化誤差は $N=4096$ において $l_1 = 5.9 \times 10^{-6}$, $l_2 = 2.0 \times 10^{-5}$ である。収束率はおよそ $O(10^{-7})$ 相当であり高精度な結果である。

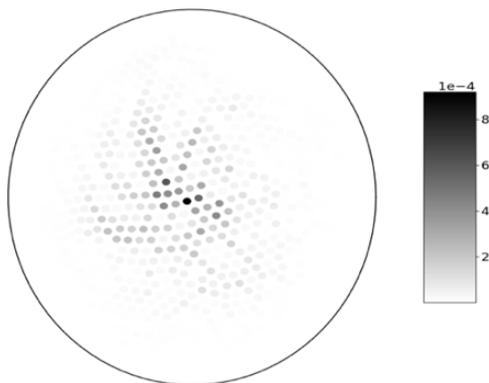


図 3.17 $t = 3$ における北半球の誤差分布。北極から見下ろした節点配置にカラーマップで誤差を表している。誤差は真値から計算解を引いた誤差の絶対値。最も外にある円は単位円を表しており誤差ではない。

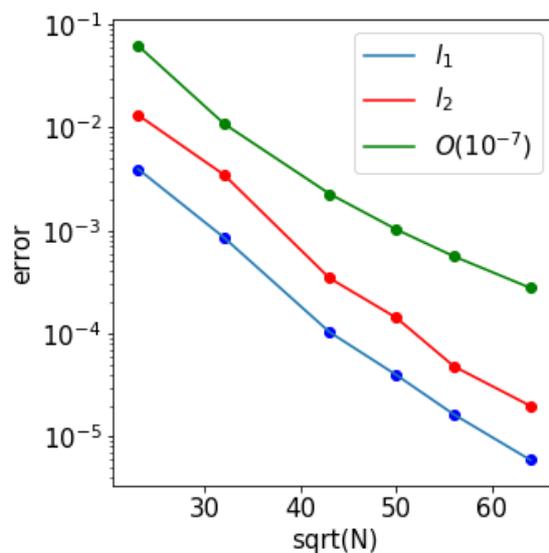


図 3.18 節点数と誤差の収束性。片対数グラフで横軸は節点数の平方根、縦軸は正規化誤差。緑線は $O(10^{-7})$ の代数的収束率を示す。

3.2.3 固有値解析

本節では RBF 法の安定性を微分行列 D_N の固有値を用いて検証する。微分行列 D_N は正規行列ではないため固有値安定性解析だけでは安定性を評価するには不十分である。しかし、時間刻み幅の十分な精度の指標がこの解析で得られる。本節では 4 次のルンゲクッタ法の安定領域と微分行列の固有値の配置との関係性から先行研究が示した結果を確かめる。

はじめに剛体回転のテストケースの結果を示す。微分行列 D_N の固有値を複素平面にプロットしたものを図 3.19 に示す。 D_N は $\varepsilon = 8.2$ 、節点数 $N = 1849$ で計算されている。固有値は虚軸に沿うような形で配置している。固有値の実部の最大値は 3.7×10^{-13} である。

固有値は節点数と ε によって値が変わる。図 3.20 に節点数ごとの固有値の虚部の最大値を示す。実験の設定は $\varepsilon = 6$ 、 $N = [529, 1024, 1849, 3136, 4096]$ である。固有値の虚部の最大値は節点数の増加に合わせて増加する。次に表 3.1 に ε ごとの固有値を示す。節点数は 1849 である。固有値は ε が小さくなるにつれて大きくなる。先行研究が示した $\varepsilon = 3, 2, 1$ の固有値は係数行列 A が特異行列となり微分行列 D_N が計算できないため、追実験のデータは得られなかった。

安定的に計算できる時間刻み幅を 4 次のルンゲクッタ法の安定領域と微分行列 D_N の固有値を用いて調べる。ルンゲクッタの安定領域に収めるために固有値を時間刻み幅でスケールリングする。時間刻み幅を Δt 、固有値を λ とすると、安定領域に収まるおよそ最大 Δt は $N = 3136, \varepsilon = 6$ の設定において $\Delta t = 206$ [min]である。 $\Delta t = 207$ [min]と $\Delta t = 206$ [min]で $t = 42$ [day]まで計算した際の l_∞ 誤差の成長を図 3.21 に示した。 $\Delta t = 207$ [min]では $t = 20$ [day]で数値的不安定を起こし、 $\Delta t = 206$ [min]では $t = 40$ [day]まで誤差は成長するが数値的不安定は起こしていない。先行研究と取れる最大時間刻み幅は異なるが数値的不安定を起こす時間や誤差の成長の振る舞いは同じ傾向であった。

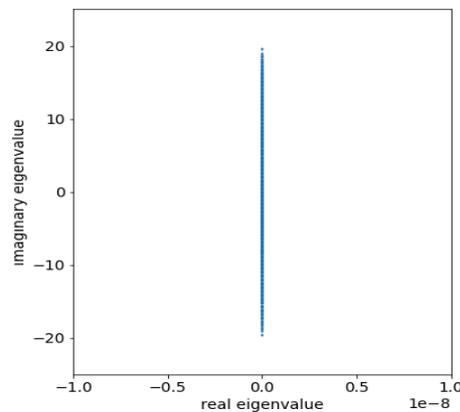


図 3.19 D_N の固有値

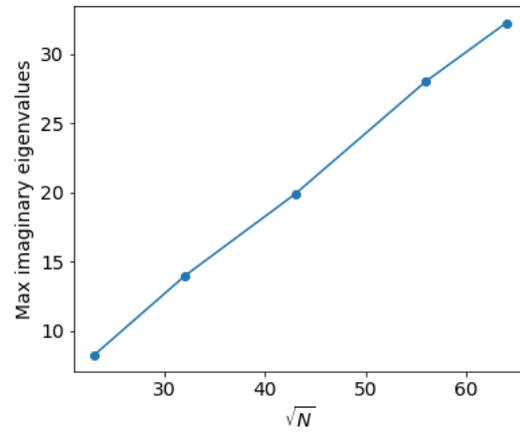


図 3.20 節点数と固有値の虚部の最大値。横軸は節点数の平方根で、縦軸は固有値の虚部の最大値

表 3.1 固有値と ε

ε	固有値の虚部の最大値
4	20.6
5	20.2
6	19.6
7	19.0
8	18.2
9	17.4

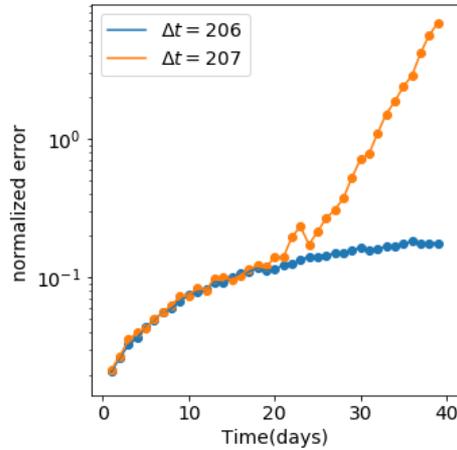


Fig. 3.21 時間刻み幅ごとの誤差の成長

次に渦の巻き上げ実験における固有値と4次のルンゲクッタ法の安定領域から安定性について議論する。先行研究と節点配置が異なるため、固有値の配置が異なる。よって不安定性の振る舞いも異なる。渦の中心を極に置き、 $N = 3136$ 、 $\varepsilon = 7.45$ における固有値を時間刻み幅でスケールしたものと4次のルンゲクッタ法を重ねたものを図3.22に示す。固有値は剛体回転のものとは違い固有値が実部を持つので不安定が引き起こされる。不安定の振る舞いはルンゲクッタ法の安定領域との関係から推測できる。図3.23に $t = 81$ まで時間刻み幅を変えて実験した l_2 誤差を示した。不安定が起こるまでの誤差の成長の特徴に時間刻み幅ごとの大きな違いは見られなかった。誤差は時間刻み幅が小さくなるにつれてより大きな誤差の成長が見られる。この違いは安定領域内に収まっていない固有値で違いが出てくると考えられる。安定領域に収まっていない固有値は数値解 ϕ_n が $|\phi_{n+1}/\phi_n| \leq 1$ の制約にないため、解が発散することが示唆される。表3.2に時間刻み幅ごとの安定領域外の固有値の性質をまとめた。安定領域外にある固有値の値が大きくなればなるほど数値的不安定的が早く起こることが確かめられた。この結果は4次のルンゲクッタ法とRBF法を合わせて使う際には、時間刻み幅は小さくするほど良いというわけではなく、安定領域にできるだけ固有値を収めるように時間刻み幅を決めた方がより安定した結果が得られることを示している。

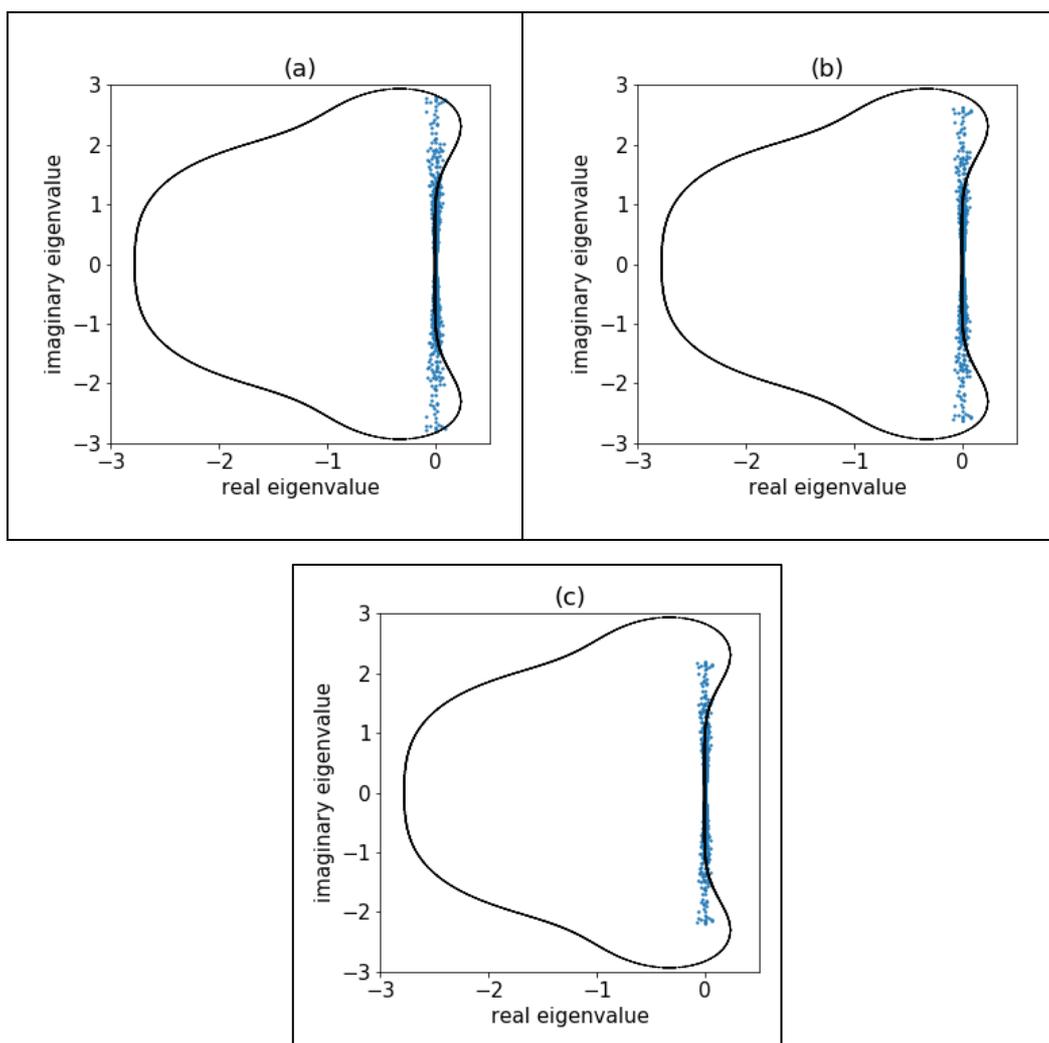


図 3.22 固有値と4次のルンゲクッタの安定領域。(a) $\Delta t = 3/14$ 、(b) $\Delta t = 3/15$ 、(c) $\Delta t = 3/18$

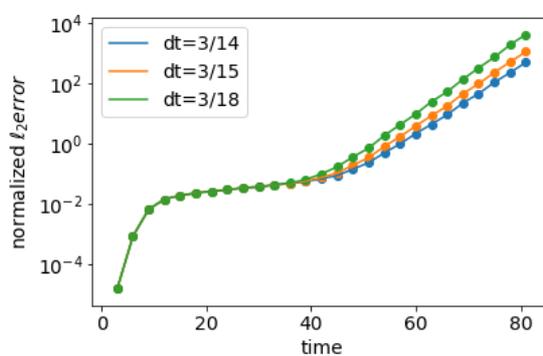


図 3.23 時間刻み幅ごとの誤差の成長。横軸は時間(s)、縦軸は ℓ_2 誤差 (対数)

表 3.2 安定領域外の固有値の性質

時間刻み幅	$\Delta t = 3/14$	$\Delta t = 3/15$	$\Delta t = 3/18$
安定領域外の固有値の個数	130	136	150
安定領域外のスケールン されていない固有値の総和	606	680	900

固有値の分布は剛体回転に対する実験結果（第 3.2 節）にも述べたように、RBF の形状を決めるパラメーター ε によっても変化する。図 3.24 に $\varepsilon = 6.45, 7.45, 8.45$ の $\Delta t = 3/15$ でスケールンされた固有値と 4 次のルンゲクッタ法の安定領域を示した。固有値の虚部と同様に ε を大きく取るにつれて正の固有値も小さくなっていくことがわかる。図 3.25 に ε ごとの $t = 81$ までの正規化 l_2 誤差の成長を示した。 ε が大きいほど安定領域外にある固有値の大きさが小さいので、不安定を起こすまでの時間が長くなる結果になった。

また固有値は渦の生成場所によっても異なる。これは式(1.4.9)の \mathbf{B} 行列が変わることが原因である。行列 \mathbf{A} は節点間のユークリッド距離で作成しているので座標系の回転からは影響を受けない。図 3.26 に渦を作る場所ごとの固有値の配置を示し、図 3.27 に ME 節点の一様性からのズレを百分率として示した。固有値は $(\lambda, \theta) = (0, 0)$ を回転させた座標系における北極としたときに虚軸に沿ったような配置になる。図 3.26 から固有値は一様性からのズレが大きな節点の近くに渦の中心を置くと正の固有値が大きくなる傾向がある。これは IMQ RBF を用いた場合でも同様な傾向が確かめられた。

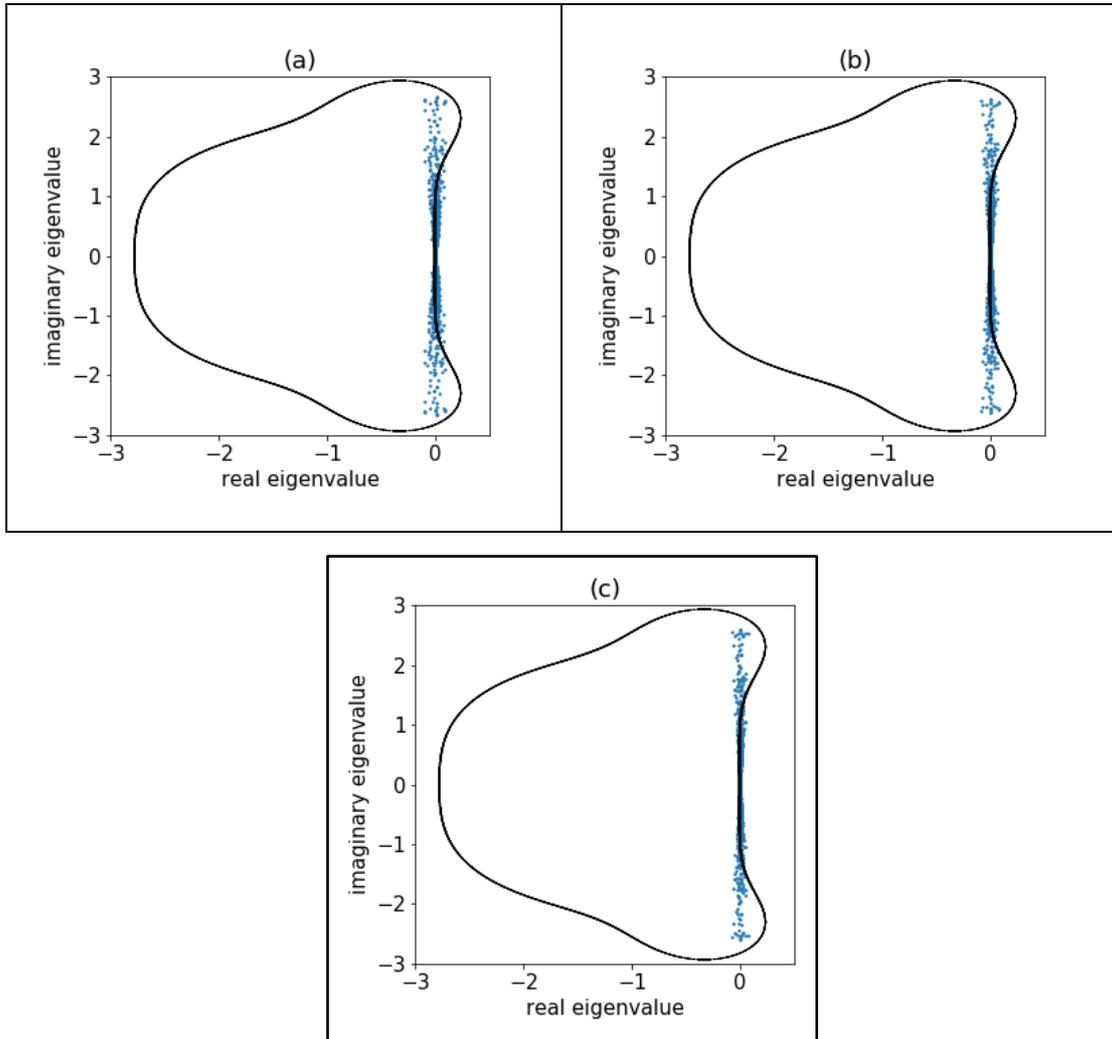


図 3.24 ε に対する固有値の変化。(a) $\varepsilon = 6.45$, (b) $\varepsilon = 7.45$, (c) $\varepsilon = 8.45$ である。

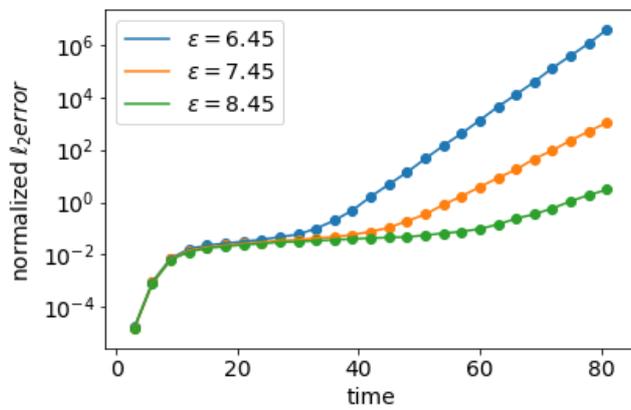


図 3.25 ε ごとの誤差の成長。横軸は時間(s)、縦軸 l_2 誤差 (対数)。

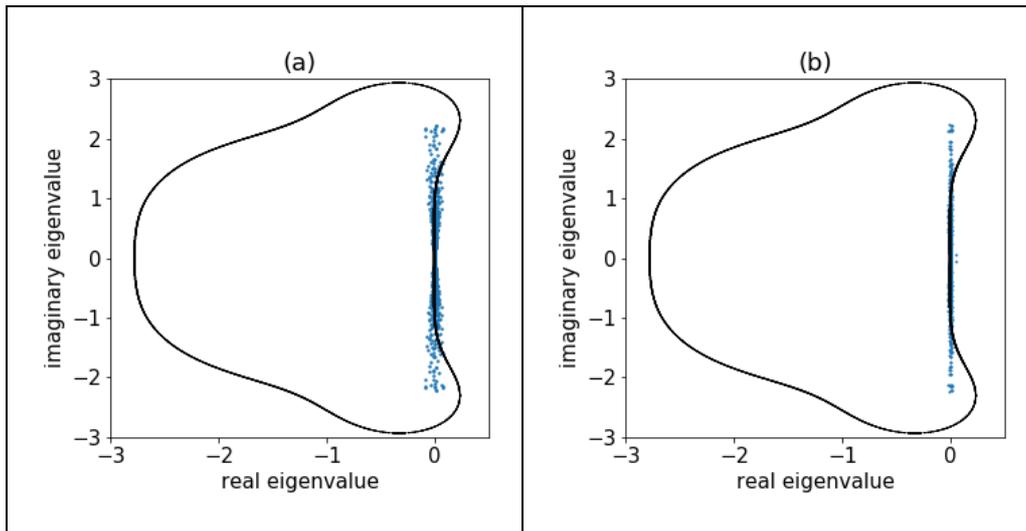


図 3.26 渦の場所ごとの微分行列の固有値

(a) $(\lambda, \theta) = (0, 90)$, (b) $(\lambda, \theta) = (0, 0)$ を傾けた座標系の北極としている。緯度経度の単位は degree である。

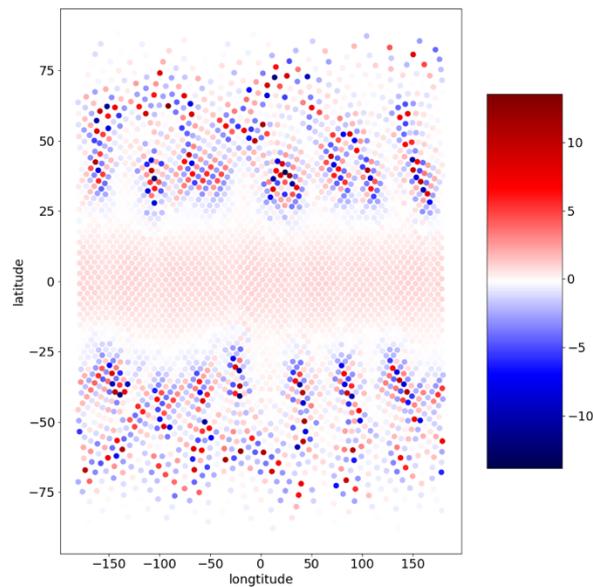


図 3.27 ME 節点の一様性からのズレの分布。カラーマップは $4\pi/N$ からの ME 節点の重みを引いたものを $4\pi/N$ で割って百分率で表している。

3.3 移流モデルの局所細密化

本節では RBF 移流モデルに対する決定論的な局所細密化節点の適用を渦の巻き上げ実験において検証する。まずは ME 節点において局所細密化節点に対する ε の解析を行い、次に準一様な節点配置との精度比較を行う。次の節において FRG におけるより多くの節点数での実験を行う。まずは移流モデルの安定性を調べ、後に精度を調べる。

3.3.1 局所細密化節点に対する形状パラメーターの検証

RBF を用いた手法における ε の重要性は第 3.1,3.2 節において述べた。 ε は RBF を用いた補間の精度を決めるだけでなく誤差の成長を決める要因でもある。本節では変動する ε に関して行った実験結果を示す。

変動する ε の最大値と最小値を調べ、両極にある静止した渦の巻き上げ実験における行列積- WD_N の固有値を時間刻み幅でスケールリングしたものと4次のルンゲクッタ法の安定領域を重ねたときの固有値と安定領域の関係を調べ、表 3.3 にまとめた。マップファクターを用いた ε_0 は 3.5 であり、距離に基づく ε の ε_0 はマップファクターを用いた ε の最小値を用いている。固有値はそれぞれの ε_0 を用いて計算を行っている。 ε の作り方が異なるので完全に公平な比較は困難であるので、固有値の最大値に関係のある ε の最小値をそろえて比較した。両極に対する Schmidt 変換においては ε の最大値は距離に基づく ε の方が全体的に大きな値になっている。そのため全体的に安定性が高いかと予想されたが、安定領域外にある固有値の実部の総和は c_0 が小さくなるにつれて距離に基づく ε のほうが多くなっていった。本研究では点をより集めた場合の安定性を重視し、マップファクターを用いた ε を使用することにした。

次に解像度が疎になっていく領域での誤差について調べる。図 3.28 に領域全体で一定の ε を用いた場合とマップファクターを使った ε を用いた場合の $t = 3$ における絶対誤差を示す。緯度依存性のある ε を用いることにより解像度が疎になっていく中緯度領域での誤差を改善できている。 $t=3$ における領域全体での誤差は固定 ε の場合は $l_2 = 6.7 \times 10^{-6}$ であり、マップファクターを用いた ε の場合は $l_2 = 1.5 \times 10^{-6}$ であり、固定 ε の誤差はマップファクターを使った ε を用いた場合のおよそ 4.6 倍である。以上より緯度依存性 ε を用いることのある解像度が下がっていく領域での誤差の抑制はできていることが示された。

表 3.3 距離に基づく ε とマップファクターを用いて求めた ε の比較

$\circ \varepsilon$ の最小値/最大値	$c_0=0.5$ dt=3/31	$c_0=0.6$ dt=3/26	$c_0=0.7$ dt=3/23	$c_0=0.8$ dt=3/20	$c_0=0.9$ dt=3/18
マップファクターを用いた ε	2.42/7.0	2.6/5.83	2.8/5.0	3.01/4.37	3.24/3.89
距離に基づく ε	2.42/7.28	2.6/6.08	2.8/5.26	3.01/4.72	3.24/4.27
\circ 安定領域外の固有値の実部の総和					
マップファクターを用いた ε	2087	1274	989	880	714
距離に基づく ε	2583	1568	912	660	702

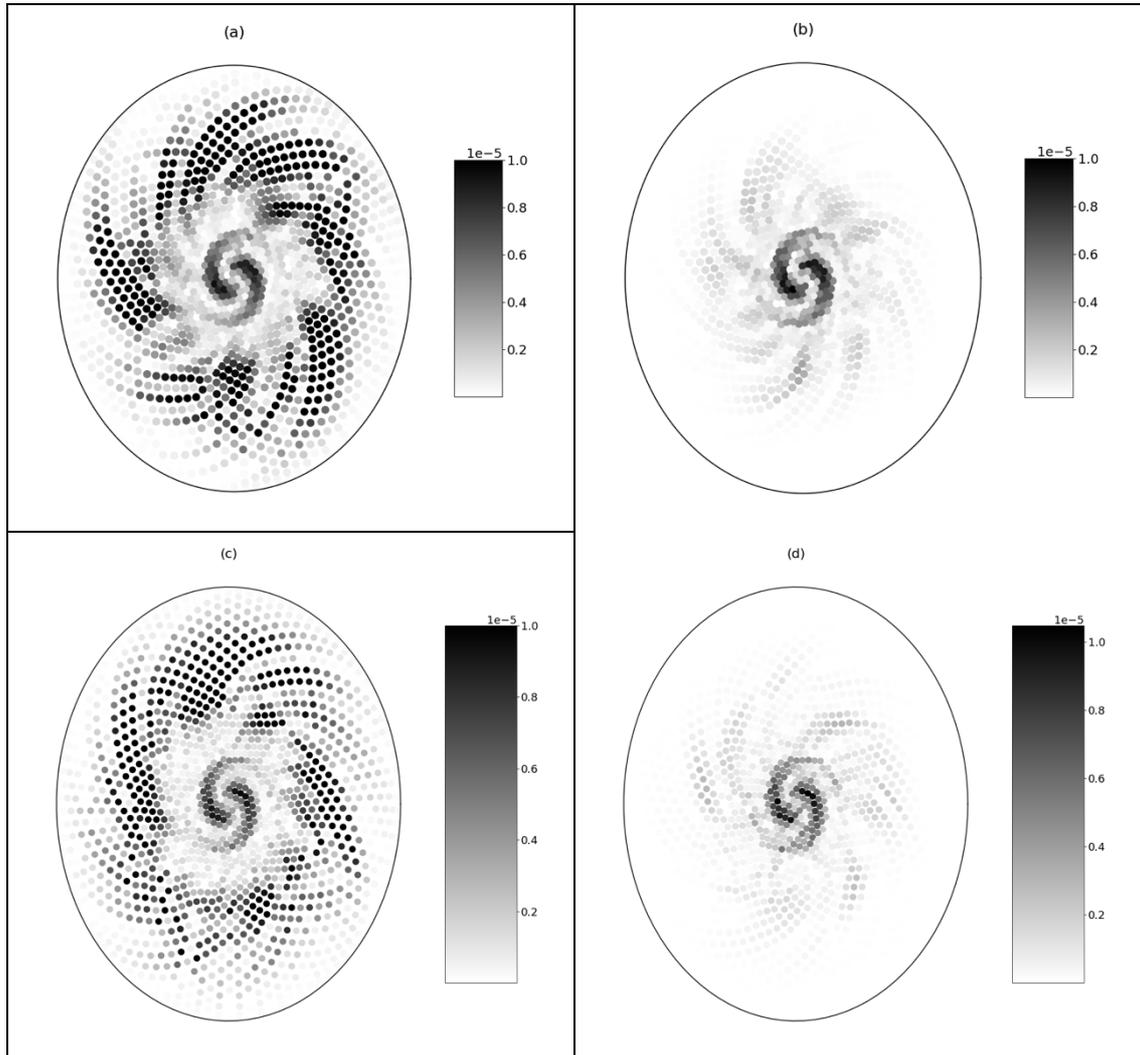


図 3.28 固定 ϵ と緯度依存性 ϵ を用いた場合の誤差の分布比較

(a)は北半球の固定 ϵ を用いた場合の絶対誤差の分布、(b)は北半球の緯度依存性 ϵ を用いた場合の絶対誤差の分布、(c)は南半球の固定 ϵ を用いた場合の絶対誤差の分布、(d)は南半球の固定 ϵ を用いた場合の絶対誤差の分布である。局所細密化の設定は $N = 3136$ 、 $c_0 = 0.5$ である。

3.3.2 局所細密化最小エネルギー節点を用いた渦の巻き上げ実験

本節では節点数 900 から 4096 点の ME 節点においてマップファクターを用いた緯度依存性 ϵ と Schmidt 変換による局所細密化手法を用いた移流モデルの性能を検証する。テストケースとして両極にある静止した渦の巻き上げ実験(3.2 参照)を扱う。基底関数は IMQRBF を用いる。いずれの実験も時間刻み幅は CFL 条件を満たすおよそ最大値を用いている。

準一様な節点配置を用いた実験と局所細密化節点とマップファクターで作った ϵ を用いた実験の結果の比較を行う。図 3.29 は $t = 3$ における ME 節点における準一様な節点と局所細

密化節点を用いた場合の数値実験の誤差を示している。まずは準一様な節点配置を用いた場合と局所細密化節点を用いた場合の誤差の比較をしていく。準一様な節点配置を用いた場合よりも局所細密化節点を用いた場合の方が全ての節点数において誤差が小さく、すべての節点数において2桁以上の誤差の改善がある。次に局所細密化節点を用いた場合の誤差の収束を見ると、誤差が節点数の増加とともに指数関数的に収束していることが見られる。

次に誤差の成長の比較を行う。図 3.30 に $t = [0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]$ における準一様な節点配置を用いた場合の誤差と局所細密化節点を用いた場合の誤差を示した。準一様な節点配置と局所細密化節点の両方共に、厳密解の細かさに対して十分な解像度ではないため誤差は時間発展とともに成長する。しかし誤差の成長率は一様な節点配置を用いた場合の方が大きく、 $t = 0.5$ から $t = 3$ にかけて準一様な節点での l_2 はおよそ 54 倍になり、局所細密化節点ではおよそ 8 倍になる。よって局所細密化節点の方が変化の激しい領域に対する精度が高く局所細密化の効果が認められた。

次に先行研究である Flyer and Lehto (2010) との比較を行う実験設定は同じ節点数、領域内の形状パラメータ ε の最小値である $\min(\varepsilon) \sim 2.5$ をそろえ、同じ時間刻み幅、4 次のロンゲクッタ法で計算を行っている。比較した結果を表 3.4 に示す。細密化の手法や解像度を揃えられているわけではないので公平な比較ではない、しかし同等の精度が得られているかどうかの指標にはなる。比較の結果から先行研究と同等の結果が得られている。

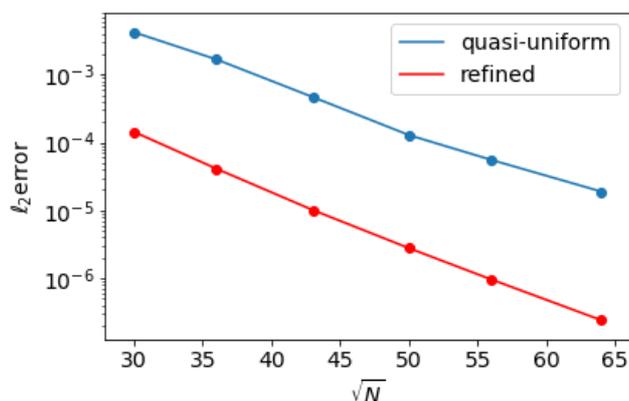


図 3.29 ME 節点を用いた数値実験の誤差比較

赤線が局所細密化節点を用いた実験結果の誤差、青線は準一様な節点を用いた実験結果の誤差。準一様な節点の ε は 3, 局所細密化節点を用いた実験での ε_0 は $3.62 c_0$ は 0.5。

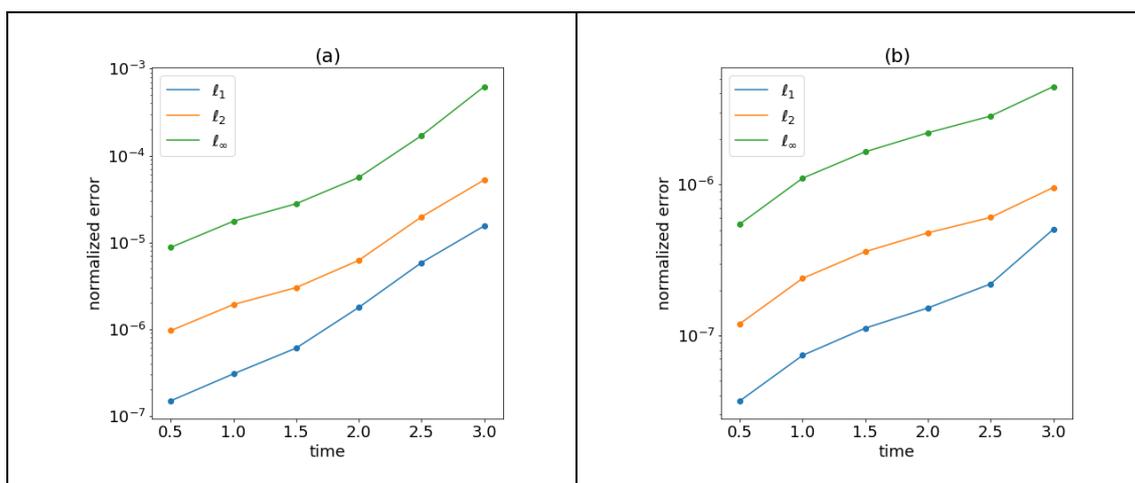


図 3.30 誤差の成長の比較。(a)準一様な節点配置を用いた実験の誤差、(b)は局所細密化節点を用いた場合の誤差。 $\varepsilon = 2.5, N = 3136$ 。一様な節点配置の時間刻み幅は $\Delta t = 1/6$ 、局所細密化は $\Delta t = 1/12$ 。

表 3.4 先行研究との正規化 RMSE の比較

節点数	先行研究	決定論的手法
900	1.8×10^{-4}	1.4×10^{-4}
1296	6.4×10^{-5}	4.1×10^{-5}
1849	1.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}
2500	6.0×10^{-6}	2.8×10^{-6}
3136	2.4×10^{-6}	9.6×10^{-7}
4096	8.9×10^{-7}	2.4×10^{-7}

3.3.3 局所細密化適減格子に対する固有値解析

本節では局所細密化節点を用いた移流モデルの安定性を検証する。本研究の目的であるより多くの節点数での実験のために、数値的最適化により作られる ME 節点を FRG に置き換えて実験を行う。まずは準一様な節点配置と局所細密化節点における $-WD_N$ の固有値の比較を行い、局所細密化による安定性の変化を検証する。次に $t=120$ まで渦の巻き上げ実験を行い、誤差の成長を検証する。

図 3.31 に 4 次のルンゲクッタ法の安定領域と $-WD_N$ の固有値を重ねた図を示す。節点配置は FRG で節点数は 3078 点である。時間刻み幅は CFL 条件を満たすおよそ最大値を用いている。固有値は時間刻み幅でスケールされている。固有値の共通の特徴は固有値が虚軸に沿うよう配置しており、数カ所実部にばらつきがあることである。局所細密化節点を用いた場合と準一様な節点配置を用いた場合を比較した時、固有値の実部のばらつきのある箇所が局所細密化節点の方が少ない。固有値と安定領域との関係を見ると、準一様

な節点配置を用いた場合は安定領域内にある固有値の数は 3036 個であるのに対して局所細密化節点は 3041 個であり、大きな違いはない。

次に準一様な節点配置と局所細密化節点を用いた $t=120$ まで渦の巻き上げ実験を行い、最大誤差の時間発展を図 3.32 に示した。 l_2 、 l_∞ 共に誤差の成長率は ME 節点を用いた場合と同様に準一様な節点配置を用いた場合の方が大きい。このテストケースにおける誤差の成長の特徴は $t=18$ までは共通しており、 l_∞ の誤差の成長は $O(10^{-2})$ まで急激に成長し、 l_2 誤差の成長は $O(10^{-3})$ まで急激に成長する。その後 l_∞ 、 l_2 は徐々に成長していく。誤差の振動は一様と局所細密化節点どちらでも起きている。 l_∞ 誤差の場合は準一様な場合と局所細密化節点のどちらでも $t = 80$ までは最大誤差の急激な成長は起こしていないが、 $t = 83$ 以降は準一様な節点配置を用いた場合は最大誤差の成長率が大きくなる。 l_2 誤差の場合は準一様な節点配置は $t = 80$ から誤差は振動せずに成長が始まっている。 l_2 誤差の成長の差は誤差の出現分布の違いから生じている。 $t = 90$ における北半球の誤差の分布を図 3.33 に示す。準一様な節点配置の場合は北緯 30° 付近まで誤差が発生しており、この誤差が時間と主に発達していくために l_2 誤差が成長していく。一方で局所細密化節点は渦の中心付近だけなので l_2 誤差の成長は緩やかである。渦の再現が不十分であるために準一様な節点配置の誤差は発散したと考えられる。安定領域外の固有値が増えるため、準一様な節点配置の場合は短い時間刻み幅は取れないので長時間における計算が安定しない。一方で局所細密化節点は解像度が高く、固有値の値が大きいため時間刻み幅を短く取ることが出来き、固有値の実部のばらつきも小さくすることができるため安定した計算が可能である。

次により大きな節点数である $N=21056$ の局所細密化節点における $t=120$ まで計算を行った実験結果を図 3.35 に示す。実験設定は $c_0 = 0.5$ 、 $\varepsilon_0 = 10$ 、 $\Delta t = 3/78$ である。 l_∞ 、 l_2 誤差ともに一定の誤差までは急激に成長するが、それ以降は小さな誤差の成長に落ち着く。次に $t = 120$ における絶対誤差の分布を図 3.36 に示す。節点数 3078 よりも誤差の領域が縮小しており、渦の再現がより正確になっている。

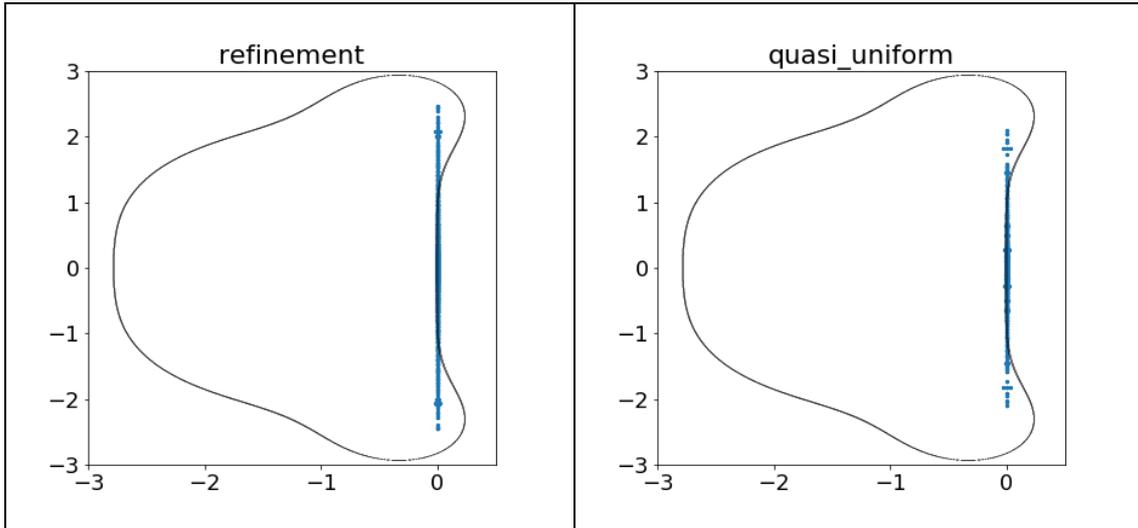


図 3.31 $-WD_N$ の固有値を時間刻み幅でスケーリングしたものと 4 次の陽的なルンゲクッタ法の絶対安定領域。局所細密化節点に対するパラメータは $c_0 = 0.5, \varepsilon_0 = 5, \Delta t = 1/10$ 、均一な節点配置に対するパラメータは $\varepsilon = 5 dt = 3/16$ 。節点数は 3078。

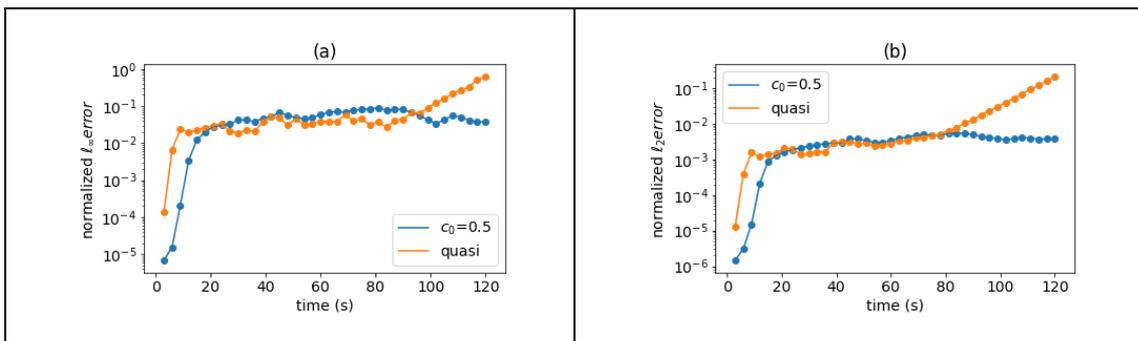


図 3.32 均一な節点配置と局所細密化節点を用いた場合の誤差の成長。(a) 正規化 l_∞ 誤差 (b) 正規化 l_2 誤差の時間発展。片対数グラフで横軸は時刻(s)。パラメータの設定は固有値解析と同じ。

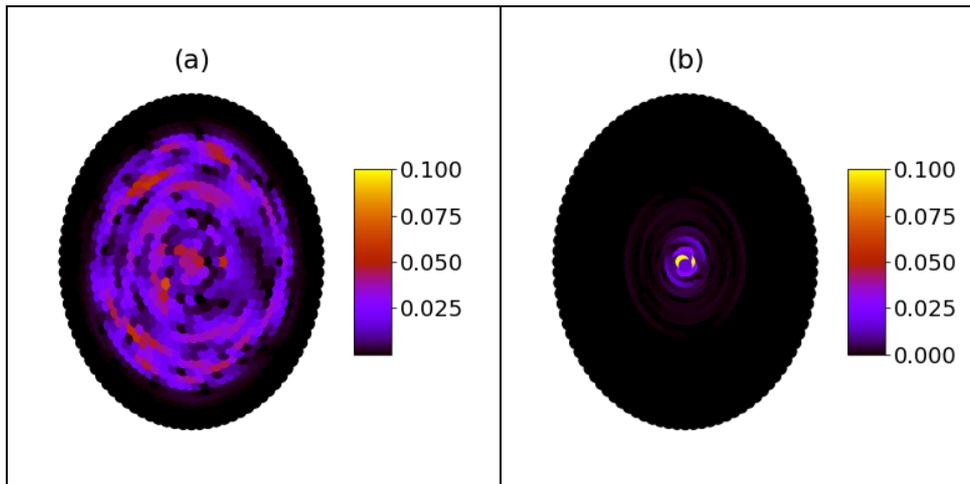


図 3.33 $t = 90$ における北半球の誤差分布。(a) 準一様な節点配置、(b)局所細密化節点

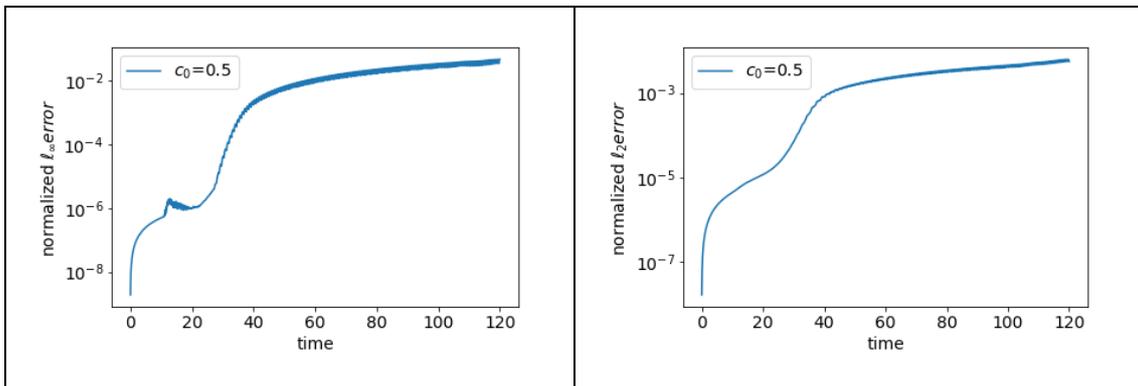


図 3.34 $t = 120$ までの誤差の成長。節点数は $N = 21056$ 、 $\varepsilon_0 = 10$ 、 $c_0 = 0.5$ 、 $dt = 3/78$ 。

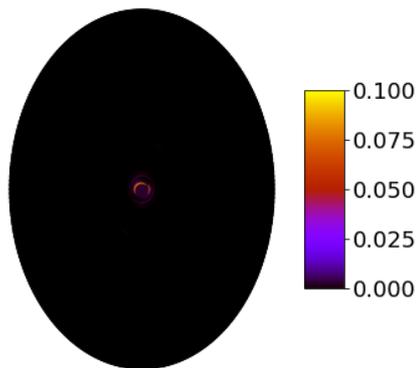


図 3.35 局所細密化節点 $N=21056$ における実験の $t=120$ の北半球での誤差。 $c_0 = 0.5$ 、 $\varepsilon_0 = 10$ 、 $dt = 3/78$ 。

3.3.4 局所細密化逡減格子を用いた渦の巻き上げ

図 3.36 は FRG の準一様な節点と局所細密化節点を用いた場合の数値実験の誤差を示している。節点数は 1974, 3078, 4358, 6024, 7890, 9840, 12340, 14986, 17720, 21056 の 10 通りを用いている。局所細密化節点の設定は $c_0 = 0.5$ を採用している。時刻幅は $c_0 = 0.5$ における局所細密化節点の CFL 条件を満たすおよそ最大値を用いている。誤差比較は $t = 6$ において行う。比較している誤差は l_2 である。各節点数における ε_0 の設定は ε_0 を $\varepsilon_0 = 2 \sim 10$ の間において 1 刻みで変化させ、 $t = 6$ で最も精度がよかつた設定を用いている。

準一様な節点を用いた実験では節点数 3078 以降は収束率が低下し、それ以上の節点数では 4 次相当の誤差の収束率になっている。局所細密化節点を用いた場合は指数的ではないが 4 次相当の誤差の収束が見られる。全ての節点数において準一様な節点配置を用いた場合よりも高精度であり、準一様な節点配置を用いた場合の誤差の $1/7$ 以下である。

次に節点数 9840 の $t = 6$ における誤差の分布を図 3.37 に示した。ここでの誤差は解析解から数値計算解を引いた値の絶対値を使っている。局所細密化節点の図で渦の概形が出てきているが、これは渦の中心部において局所細密化節点の節点間距離が準一様な節点のおよそ $1/2$ であり、準一様な節点では見えない誤差の構造が見えているのである。誤差の分布について見ていく。解像度が疎になっていく高緯度から低緯度にかけて誤差が生じていないので大きな節点数においても Runge 現象は生じていない。2 つの設定の結果を比較したときに渦の中心付近で最大誤差が発生することは共通である。しかし、局所細密化節点では渦の中心領域での誤差の改善が見られ、渦の外側での誤差の改善が大きい。最大誤差の比較では局所細密化節点の誤差は準一様な節点よりも 1 桁小さい。以上のことから変化の激しい領域における誤差の改善が見られるので局所細密化は成功している。

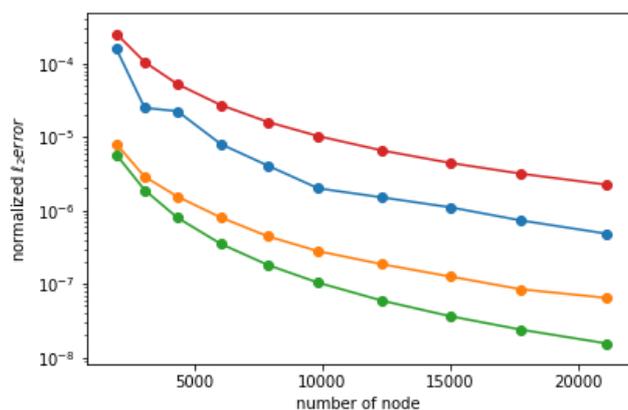


図 3.36 逡減格子における誤差の収束

青線は準一様な節点配置を用いた実験の誤差、オレンジ線は局所細密化節点を用いた実験の誤差。赤線は $O(10^{-4})$ の収束率を示し、緑線は $O(10^{-5})$ の収束率を示す。

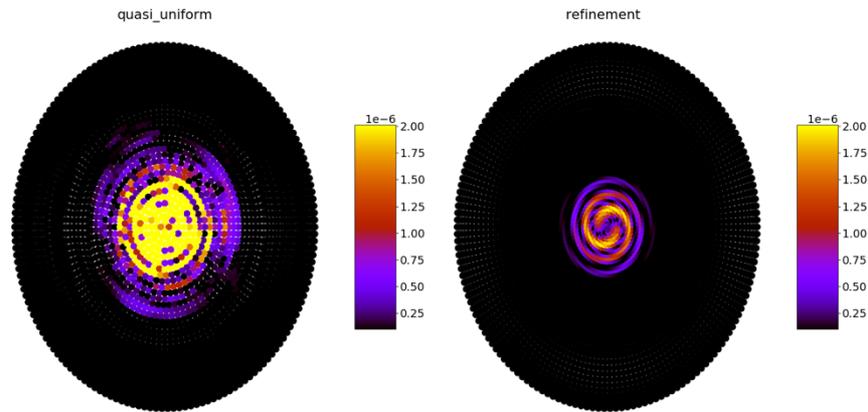


図 3.37 北半球における $t=6$ の絶対誤差の分布

左図が準一様な節点配置を用いた実験の誤差であり右図が局所細密化節点を用いた実験の誤差。パラメーターの設定は $c_0 = 0.5, \varepsilon = 7, \varepsilon_0 = 7, N = 9840$.

第4章 まとめ

第2章では先行研究で定式化されている内挿、境界値問題の解法、移流モデルに関して述べ、決定論的な局所細密化として Schmidt 変換を述べ、両極に対する局所細密化のためにパラメータ c を置き換えた。次に解像度が疎になっていく領域での Runge 現象を抑制するために形状パラメータ ε にマップファクターを用いて緯度依存性を持たせた。

第3章では第2章で述べた手法を用いて先行研究の実験を行い、RBF 手法の精度検証を行った。その後に決定論的な局所細密化を適用した移流モデルを用いて渦の巻き上げ実験を行い、手法の精度と安定性の検証を行った。

第3.1節の内挿と境界値問題の解法の実験では ε を小さくすることで RBF 法の精度が向上することを示し、 ε をより小さくすることで条件数が増大し、悪条件となり、計算が安定しなくなることを確認した。

第3.2節では剛体回転と両極にある静止した渦の巻き上げ実験を行い、RBF を用いた移流モデルの精度及び安定性を検証した。

剛体回転では有限回微分可能な初期値である cosine bell の移流実験において節点数を変えて実験したところ、誤差の収束が7次相当の代数的収束から2次相当代数的収束に鈍ることが確認された(図3.12)。無限回微分可能な初期値である gaussian bell の移流実験で節点数を変えて実験したところ、誤差はスペクトル精度が確認された(図3.13)。渦の巻き上げ実験において節点数を変化させて実験すると、誤差の収束は7次の代数的収束が確認された。無限回微分可能な初期値の場合には RBF 移流モデルが高精度な計算が可能であることが示された。

第3.2節の最後に固有値解析を行い、移流モデルの安定性を検証した。まずは剛体回転のテストケースにおいて安定性を検証した。微分行列の固有値が節点数の増加に伴って固有値の虚部が増加することを示し(図3.20)、 ε の減少に伴って増加することも示した(表3.1)。次に微分行列の固有値を複素平面にプロットし、時間刻み幅でスケールリングし、4次のルンゲクッタ法の安定領域と重ね、最大時間刻み幅が安定領域と固有値の関係で計算が可能であるかを検証した。固有値の虚部の最大値が安定領域外になる時間刻み幅 $\Delta t = 207[\text{min}]$ と安定領域内に収まる時間刻み幅 $\Delta t = 206[\text{min}]$ で $t=40$ まで剛体回転を行い、 $\Delta t = 207[\text{min}]$ では数値的不安定が生じ、 $\Delta t = 206[\text{min}]$ では小さな誤差の成長が続いた(図3.21)。よって先行研究が示した時間刻み幅でスケールリングされた固有値と安定領域との関係で時間刻み幅の最大値が計算できることが確認された。

次に渦の巻き上げ実験における固有値解析を行った。渦の巻き上げ実験では正の実部を持つ固有値があるので数値的不安定が生じた。先行研究と節点配置が異なるので異なる固有値の配置となり、先行研究とは異なる不安定の振る舞いとなった。安定性と時間刻み幅の関係を見るために ε を固定し、時間刻み幅を変えて固有値と安定領域との位置関係を調べた(表3.2)。時間刻み幅をより小さく取ることにより安定領域外の固有値の数、固有値の実部

の総和が増えていく傾向が見られた。実際に固有値解析の結果を検証するために $t=81$ まで渦の巻き上げを計算した実験では時間刻み幅が小さいほど早い時間で数値的不安定を引き起こすことが示された (図 3.23)。この結果は安定領域外の固有値を持つ微分行列を扱う場合には、数値的不安定を抑制するためには時間刻み幅にはある程度の大きさが必要であり、時間刻み幅が小さいほど安定するわけではないことが示唆されている。

次に ε の安定性への影響を調べるために時間刻み幅を固定して形状パラメーター ε を変化させて実験を行った。 ε を大きく取るほど固有値の正の実部は小さくなり (図 3.24)、数値的不安定が生じる時間が遅くなることが示された (図 3.25)。しかし、 ε を大きく取ることは関数近似の精度を犠牲にすることになるため、数値的不安定を遅らせることは出来ても計算領域全体の誤差が増える結果になってしまう。以上のことから高精度で安定な計算を行うためには適度な ε と時間刻み幅を選択する必要があると考えられる。適度な時間刻み幅は固有値解析から得られ、適度な ε は初期 (およそ $t = 0 \sim 6$) の誤差の成長が最も小さい設定になると考えられる。

次に節点の一様性が固有値に与える影響を調べるために渦の中心を赤道においたものと極に置いたものを固有値解析で比較した。固有値は一様性の高い領域では虚軸に沿った配置になる傾向があり、一様性からのズレが大きな領域では固有値が正の実部を持つ傾向になった。このことからできるだけ一様性の高い節点配置を用いることが安定性のためには必要であることがわかった。

第 3.3 節では決定論的な局所細密化節点を適用した移流モデルにおいて渦の巻き上げ実験を行い、精度と安定性を検証した。

まずは局所細密化節点に対する ε の解析を行った。固有値解析により安定性を比較し、より点を集中させた設定では先行研究が用いた距離に基づく ε よりマップファクターを用いた ε の方が安定領域外の固有値の数が少ないので安定であることを示した (表 3.3)。

次に先行研究との比較を行うために、まずは同じ節点配置である ME 節点での渦の巻き上げ実験を行い、性能を検証した。実験では先行研究と同じ誤差の比較時間である $t = 3$ で ℓ_2 誤差の比較を行ったところ、局所細密化節点を用いた場合には準一様な節点配置を用いた場合より 2 桁以上小さくなることを示し (図 3.29)、また $t = 3$ までの誤差の成長率が準一様な節点配置よりも小さいことを示した (図 3.30)。Flyer and Lehto (2010) とできるだけ実験の設定を揃えた実験での誤差の比較においては同等の精度が得られることが示された (表 3.4)。

次により多くの節点数における実験のために決定論的に計算できる逡減格子に節点を置き換えて実験を行った。まず安定性を調べるために準一様な節点配置と局所細密化節点を用いて固有値解析を行い、固有値と安定領域の位置関係を比較した。局所細密化により誤差の成長を引き起こす固有値の減少が確認された (図 3.31)。固有値解析で局所細密化節点の方がより安定であることが示されたので、実際に $t = 120$ まで渦の巻き上げ実験を行い安定性の比較を行った。最大誤差の時間発展を準一様な節点配置と局所細密化節点を比較し、局所細

密化節点を用いた移流モデルが数値的不安定を起こさないことを示した。局所細密化により安定性の向上が確認され、最大時間刻み幅が計算でき、適度な ε が精度検証により推定できるのでより大きな節点数においても数値的不安定を起こさずに計算できる可能性があると考えられた。よって $N=21056$ の移流モデルにおいて $t = 120$ まで実験を行った。正規化最大誤差は節点数 3078 と比較して誤差の成長が遅くなり、また数値的不安定を起こさなかった。この結果からより大きな節点数においても安定的に計算できる可能性があることが示唆された。

次に決定論的な局所細密化を適用した移流モデルの精度を検証するために $t=6$ まで渦の巻き上げ実験を行った。局所細密化節点の誤差は先行研究のおよそ 5 倍に当たる節点数 21056 における実験では準一様な節点配置の誤差よりも $1/7$ の大きさに減少していた。誤差の収束を調べるために節点数を変化させ、それぞれの節点数で適切な設定で実験をすると、誤差は 4 次相当の収束であり、十分高精度であることが示された(図 3.36)。

以上のことから RBF を用いた移流モデルに対する局所的細密化は数値的最適化を用いた局所細密化から決定論的な局所細密化に置き換えることが可能であることが示された。

参考文献

Courtier, P., and J.-F. Geleyn, 1988: A global numerical weather prediction model with variable resolution: Application to the shallow-water equations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **114**, 1321–1346.

Flyer, N., and G. B. Wright, 2007: Transport schemes on a sphere using radial basis functions. *J. Comput. Phys.*, **226**, 1059–1084,

Flyer, N. and E. Lehto, 2010: Rotational transport on a sphere: Local node refinement with radial basis functions. *J. Comput. Phys.* **229**, 1954–1969.

Fornberg, B., and G. Wright, 2004: Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter. *Compt. Math. Appl.*, **48**, 853–867.

Fornberg, B., and J. Zuev, 2007: The Runge phenomenon and spatially variable shape parameters in RBF interpolation. *Compt. Math. Appl.*, **54**, 379–398.

Hardy, R. L., 1971: Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geophys. Res.*, **76**, 1905–1915.

Hortal, M., and A. J. Simmons, 1991: Use of reduced Gaussian grids in spectral models. *Mon. Wea. Rev.*, **119**.

Kansa, E. J., 1990: Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Comp. Math. Appl.*, **19**, 147–161.

Kurihara, Y., 1965: Numerical Integration of the primitive equations on a spherical grid. *Mon. Wea. Rev.*, **93**, 400–415.

Larsson, E., and B. Fornberg, 2003: A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs. *Compt. Math. Appl.*, **46**, 891–902.

Nair, R., J. Côté, and A. Staniforth, 1999: Cascade interpolation for semi-Lagrangian

advection over the sphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**.

Rakhmanov, E. A., E. B. Saff, and Y. M. Zhou, 1994: Minimal discrete energy on the Sphere. *Math. Res. Lett.*, **1**, 647–662.

Schmidt, F., B., 1977: Variable fine mesh in spectral global models, *Phys. Atmos.*, **50**, 211–217

Tillenius, M., E. Larsson, E. Lehto, and N. Flyer, 2015: A scalable RBF–FD method for atmospheric flow. *J. Comput. Phys.*, **298**, 406–422.

T. T. Wong, W. S. Luk. And P. A. Heng, 1977: Sampling with Hammersley and Halton points. *J. Graph. Tools*, **2**, 9–24.

Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber, 1992: A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, **102**, 211–224.

Wright, G. B., <https://github.com/gradywright/spherepts>, 2021 年 1 月 25 日閱覽.