球面螺旋を用いた浅水波モデル

* 榎本剛 (京大防災研)

1 はじめに

球面螺旋を用いると，球面上で準一様な節点を容易に生成できる [1]。近年, 格子や構造を持たない球面上の節点に対し, RBF（radial basis function, 距離基底函数）を適用した 2 次元移流モデル [2] 及び浅水波モデル [3] が開発された。そこで本研究では，簡潔なコードでスペクトル精度（高次精度）が得られる RBF 法を用いて球面螺旋の特性を生かした浅水波モデルを開発する。

1.1 球面螺旋

球面螺旋は, 経度 λ と余緯度 θ の簡潔な式で表される。

$$\lambda = m\theta \mod 2\pi \tag{1}$$

$m = \sqrt{n\pi}$ とし, 回転軸 $z = \cos\theta$ 上で n 個の点を等間隔に取る [4]。本研究では, 南北両半球の節点の個数が同じになるように m を偶数に取り, 極付近の非一様性を緩和するために両極上に節点を置いていない（図 1）。

1.2 RBF 法

RBF$\phi(r)$（ユークリッド距離 r のみの函数）による内挿は，次のように表される。

$$s(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j\phi(r_j),\ r_j = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j|| \tag{2}$$

n 個の節点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ において，そこでの値 $\mathsf{f} \equiv [f_1, f_2, ..., f_n]^\mathsf{T}$ と内挿値が一致するという条件（選点法）

$$\mathbf{f} = A\mathbf{c} \tag{3}$$

を課す。ここで $r_{i,j} \equiv ||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||$ に対して

$$A \equiv \begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(r_{1,2}) & \dots & \phi(r_{1,n}) \\ \phi(r_{2,1}) & \phi(0) & \dots & \phi(r_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(r_{n,1}) & \phi(r_{n,2}) & \dots & \phi(0) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

これを解けば, 係数 $\mathsf{c} \equiv [c_1, c_2, ..., c_n]^\mathsf{T}$ が得られる。

微分演算子 D は，A^{-1} と $\phi'(r)/r$ に比例する要素からなる行列 B との積 $D = BA^{-1}$ で表される。

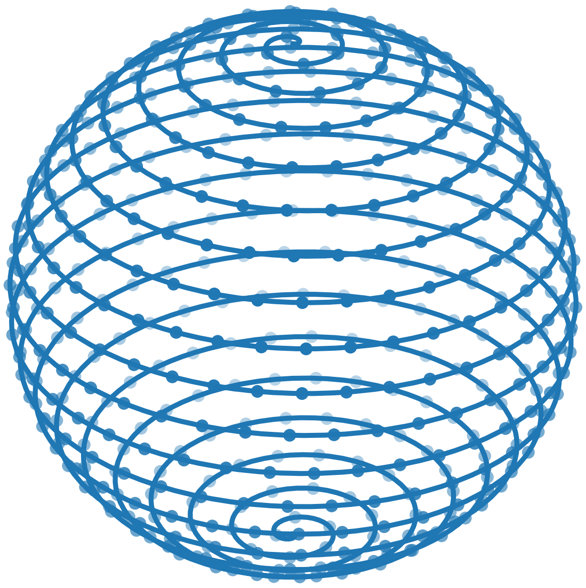

図 1 節点数 $n = 529$ の球面螺旋

逆行列を求めるには，$O(n^3)$ の計算が必要となるが，節点の配置のみに依存するので最初に一度だけ計算しておけば良い。

球面上の函数 $f(\boldsymbol{x})$ の積分は (2) を用いて

$$I(f) \approx I(s) = \sum_{j=1}^{n} c_j I(\phi_j) \tag{5}$$

と表される。ここで内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表し，$\boldsymbol{I} \equiv \{I(\phi_j)\}_{1\le j\le n}$ と書くと，(3) より

$$I(s) = \langle\boldsymbol{c}, \boldsymbol{I}\rangle = \langle A^{-1}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{I}\rangle \tag{6}$$

と書ける。$I(s)$ を $\langle\boldsymbol{w}, \boldsymbol{f}\rangle$ で表すと，重み $\boldsymbol{w}$ は

$$\boldsymbol{w} = A^{-1}\boldsymbol{I} \tag{7}$$

で表される。どの節点でも同じ RBF を用いる場合，$\boldsymbol{I}$ のすべての要素は等しいので，$\boldsymbol{I} \propto \boldsymbol{e}$（$\boldsymbol{e}$ は要素がすべて 1 であるベクトル）である。このとき，重み $\boldsymbol{w}$ は内挿行列の逆 A^{-1} の各行の和に比例する。和を単位球の表面積 4π に規格化する場合の重みは

$$\boldsymbol{w} = 4\pi\frac{A^{-1}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^\mathsf{T}A^{-1}\boldsymbol{e}} \tag{8}$$

と表される。

2 RBF を用いたモデル

先行研究が示した RBF を用いたモデル [2, 3] の概要を記す。

2.1 2 次元移流モデル

球面上の 2 次元移流モデル [2] は, 緯度 (ϕ) 経度 (λ) 座標を用いて

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)h = -\frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial\lambda} - \frac{v}{a}\frac{\partial h}{\partial\phi} \quad (9)$$

と表される。定常流に対する微分演算子は

$$B_{i,j} = \{u(\lambda_i,\theta_i)\cos\theta_j\sin(\lambda_i-\lambda_j) + v(\lambda_i,\theta_i) [\cos\theta_j\sin\theta_i\cos(\lambda_i-\lambda_j) - \sin\theta_j\cos\theta_i]\}\,\frac{\phi'(r_{i,j})}{r_{i,j}} \quad (10)$$

を用いて $D = BA^{-1}$ と表される。

2.2 浅水波モデル

3 次元デカルト座標系の浅水波方程式 [3] は

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = -(\boldsymbol{u}\cdot P\nabla)\boldsymbol{u} - f(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{u}) - gP\nabla h - \mu\boldsymbol{x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -P\nabla\cdot(h\boldsymbol{u}) \quad (12)$$

と書ける。ここで運動を球面上に拘束するため, 微分に対しデカルト空間から球の接平面に投影する線型演算子 $P \equiv I - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ を作用 [3] させ, 時間変化に Lagrange の未定乗数 $\mu \equiv \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot P\nabla\boldsymbol{u} + g\nabla h)$ として運動方程式 (11) に強制項を付加 [7] している。微分演算子の計算には

$$B^d_{i,j} = [d_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j - d_j]\frac{\phi'(r_j(\boldsymbol{x}_i))}{r_j(\boldsymbol{x}_i)},\ r_j(\boldsymbol{x}_i) \equiv ||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|| \quad (13)$$

を用いる。ここで d は x, y, z のいずれかである. 時間積分には 4 次のルンゲクッタ法を用い，セミ・インプリシット法等重力波の制御は用いていない。

3 結果

ここでは二つの節点の分布を比較し，浅水波の標準実験 [8] において，それらを用いたモデルの比較を行う。

3.1 節点の一様性

節点数 1849 の最小エネルギー節点 [2, 3] と球面螺旋節点について, (8) により面積の重みを計算し, 一様な重み $4\pi/n$ からのずれを図 2 に示す。どちらもほとんどの場所で誤差が $\pm 1\%$ 以内であるが, 球面螺旋の節点の誤差は螺旋の曲率が大きい極付近に集まっているのに対し, 最小エネルギー節点の誤差は複数の箇所に分布している。

表 1　節点数 $n = 1849$ での定常状態実験における h の相対誤差 ℓ_2。ME 及び SH はそれぞれ最小エネルギー節点及び球面螺旋節点。

case	node	ε	ℓ_2
2	ME	4	4.21×10^{-9}
2	SH	4	1.99×10^{-9}
3	ME	3.25	4.97×10^{-8}
3	SH	3	2.97×10^{-8}

3.2 線型移流

剛体回転による移流実験（case 1）では，球面螺旋節点上の 2 次元移流モデル [2] を用いた。RBF はガウス型の $\phi(r) = \exp(-(\varepsilon r)^2)$ (ε は形状パラメタ）を採用した。$\alpha = \varepsilon\Delta x = 0.55$ を固定し, 平均的な $\Delta x = \sqrt{4\pi/n}$ に対して ε を変化させる。cos 型の山（$\Delta t = 30$ 分）では, 3 次精度を超える精度が，ガウス型の山（$\Delta t = 10$ 分）で指数函数的な誤差の減少が得られた（図 3)。

3.3 定常状態

定常非線型地衡流の実験（case 2, 3）では, デカルト座標で定式化した浅水波モデルを用いる。与える流れは，case 2 は回転軸を 90 転倒した剛体回転，case 3 は 60 度転倒したジェットのある地衡流である。RBF は，多重二乗 $\phi(r) = \sqrt{1+(\varepsilon r)^2}$ を用いた。時間刻み幅は $\Delta t = 24$ 分である。球面螺旋でも，最小エネルギー節点と遜色ない結果が得られた（表 1)。

3.4 孤立峰を超える流れ

順圧モデルの解析解を初期値にした実験（case 5）は，中緯度に孤立峰を置き case 2 の地衡流を与える。最小エネルギー及び球面螺旋節点の積分終了時（$t = 15$ 日）における誤差は，それぞれ 8.46×10^{-4} 及び 8.40×10^{-4} とほぼ同じで時間発展もよく似ていた。図 5 に球面螺旋節点を用いた場合の参照解 [5] からの差を示す。参照解は T213 のスペクトル

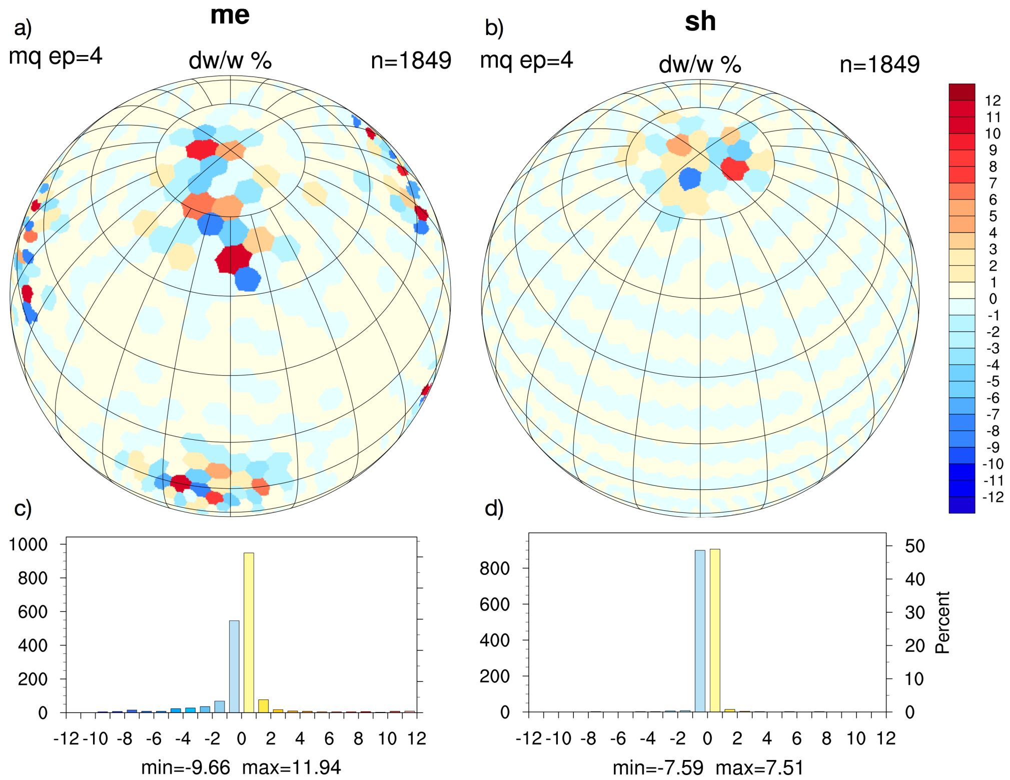

図 2　節点数 $n = 1849$ の最小エネルギー (a, c)[6] 及び球面螺旋 (b, d) 節点の重みの一様 $4\pi/n$ からのずれ (%)

変換モデルによる計算結果を T106 に切断したものである。初期時刻から積分期間を通じて山岳の周辺に参照解との差が見られる。重力波の制御をしていないため，重力波が行き交うものの，case 2 及び 3 同様 $\Delta t = 24$ 分で安定して 15 日間の積分ができた。

4　まとめ

簡単に一様性の高い節点を生成できる球面螺旋の特徴を活かすため，座標系に寄らない RBF 法を採用した浅水波モデルを作成した。ガウス型及び cos 型の山を移流する実験の結果，このモデルがスペクトル精度を持つことを確認した。

球面螺旋節点は，先行研究で用いられた最小エネルギー節点よりも一様性が高く，浅水波標準実験の結果では，同等以上の精度が得られた。RBF 法は $O(n^2)$ の計算量を必要とするが，少ない節点で高い精度が得られることから，本研究で開発した力学コアは大気大循環モデルにおいても有用な手法であると考えられる。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP15K13417 及び文部科学省ポスト「京」萌芽的課題 3「太陽系外惑星 (第二の地球) の誕生と太陽系内惑星環境変動の解明」の助成を受けた。

参考文献

[1] 榎本剛, 2013: A312, 日本気象学会 2013 年度秋季大会講演予稿集, **104**, pp.372.

[2] Flyer, N. and G. B. Wright, 2007: *J. Comp. Phys.*, 226, pp.1059–1084.

[3] Flyer, N. and G. B. Wright, 2009: *Proc. Roy. Soc. A*, 465, pp.1942–1976.

[4] Bauer, 2000: *J. Guild. Control. Dyn.*, 23, pp.130–137.

[5] Jakob, R. et al. 1993: NCAR/TN-388+STR, 82 pp.

[6] Wright, G. B., 2016: github.com/gradywright/spherepts.git.

[7] Côté, J., 1988: *Mon. Wea. Rev.*, 114, pp.1347–1352.

[8] Williamson, D. L. et al. 1992: *J. Comput. Phys.*, 102, pp.211–224.

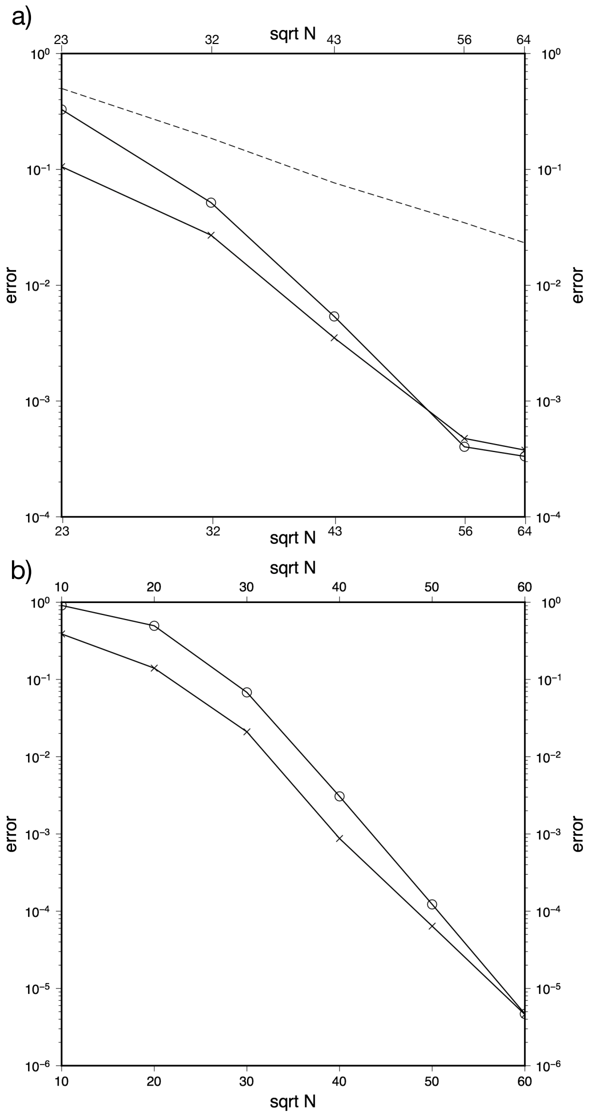

図 3 (a) cos 型（$N = 529, 1024, 1849, 3136, 4096$，破線は $N^{-3/2}$），(b) ガウス型の山 （$N = 100, 400, 900, 1600, 2500, 3600$）の移流実験。○ 及び × はそれぞれ ℓ_2 及び ℓ_{inf} ノルム。

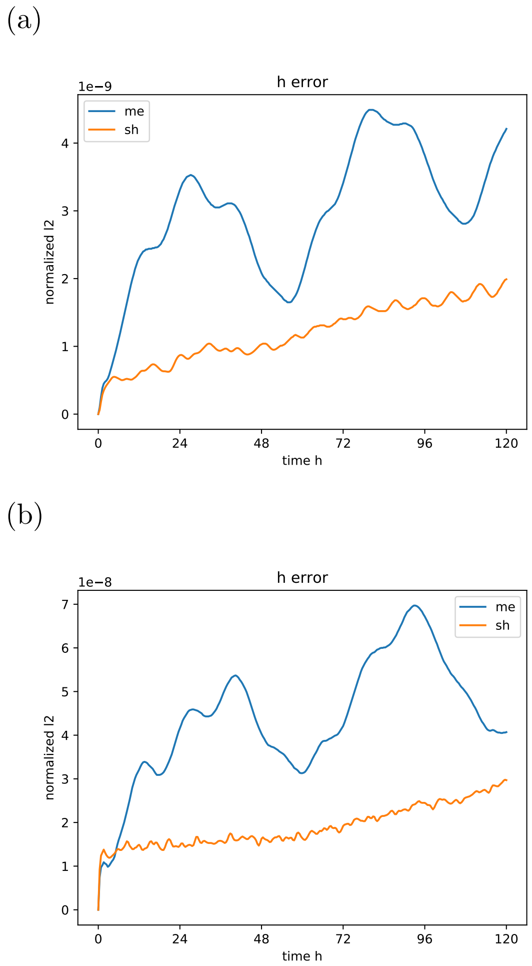

図 4 Case 2 (a), 3(b) における高度の規格化された ℓ_2 ノルム。青及び橙はそれぞれ最小エネルギー及び球面螺旋節点を表す。

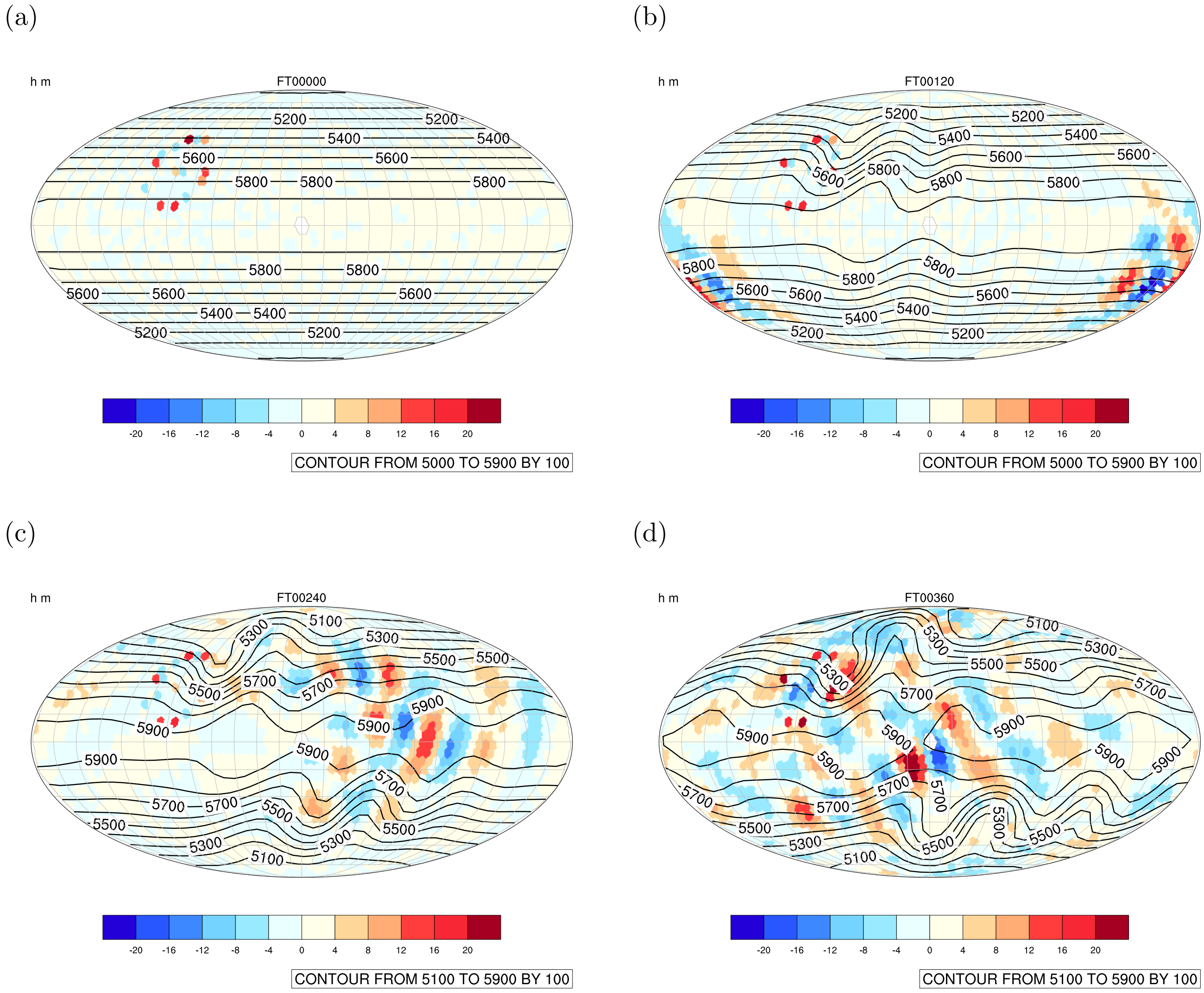

図 5　球面螺旋を用いた場合の case 5 における高度（等値線）及びその高解像度実験からの差（陰影）。予報時刻 (a) 0, (b) 5, (c) 10 (d) 15 日。